PAULI-KORREKTE SEPARABLE POTENTIALE FÜR WECHSELWIRKUNGEN ZUSAMMENGESETZTER TEILCHEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der
FAKULTÄT FÜR PHYSIK
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

Roland Kircher
aus Esslingen

1981

PAULI-KORREKTE SEPARABLE POTENTIALE FÜR WECHSELWIRKUNGEN ZUSAMMENGESETZTER TEILCHEN

PAULI-KORREKTE SEPARABLE POTENTIALE FÜR WECHSELWIRKUNGEN ZUSAMMENGESETZTER TEILCHEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der
FAKULTÄT FÜR PHYSIK
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

Roland Kircher
aus Esslingen

1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Mündliche Prüfung: 11. Februar 1981

Dekan: Prof. Dr. R.P. Hübener
1. Berichterstatter: Prof. Dr. E.W. Schmid
2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Wildermuth

Abstract

KIRCHER, ROLAND:

PAULI-KORREKTE SEPARABLE POTENTIALE FÜR WECHSELWIRKUNGEN ZUSAMMENGESETZTER TEILCHEN

Es wird eine Methode vorgestellt zur Konstruktion von separablen Potentialen über die Wellenfunktionen des optischen Fischgrätenmodells oder der Resonating Group Methode. Die separablen Potentiale reproduzieren nicht nur die on-shell Information, sondern auch die off-shell Information der nichtseparablen Wechselwirkungen in einem vorgegebenen Energiebereich. Die korrekte Wiedergabe vor allem der off-shell Information ist von besonderer Bedeutung, da das off-shell Verhalten der Wechselwirkungen zusammengesetzter Teilchen stark vom Pauli-Prinzip beeinflußt wird. Die so konstruierten separablen Potentiale sind reell, symmetrisch und energieunabhängig. Ein wesentliches Merkmal dieser unitären Interpolationsmethode besteht darin, daß mit dem separablen Potential das optische Fischgrätenmodell wiedergegeben wird, dessen on-shell Verhalten an die experimentellen Daten angepaßt ist. Dadurch erhält man ein Potential, das man als Hybridpotential bezeichnen kann, da das on-shell Verhalten aus dem Experiment folgt, das off-shell Verhalten dagegen aus dem Pauli-Prinzip, d.h. aus der Theorie.

Als numerische Beispiele wurden separable Potentiale konstruiert für die elastische α-α Streuung und die elastische N-α Streuung. Dabei werden nicht nur die Phasenkurven des vorgegebenen Modells recht gut wiedergegeben, sondern auch die Wellenfunktionen im Nahbereich, wo sie sehr sensitiv sind für den Einfluß des Pauli-Prinzips.

Für meine Eltern

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

II.1 Das optische Fischgrätenmodell

II.2 Einige Vorbemerkungen zur separablen Wiedergabe von Potentialen

II.3 Die unitäre Interpolationsmethode

III. Numerische Beispiele

III.1 Die α-α Wechselwirkung

III.2 Die N-α Wechselwirkung

IV. Zusammenfassung und Diskussion

Anhang

Literatur

Verzeichnis der Abbildungen

I. Einleitung

Seit der grundlegenden Arbeit von Faddeev [1] im Jahre 1960 über das quantenmechanische Dreikörperproblem hat die Entwicklung separabler Potentiale zunehmend an Bedeutung für die Approximation der Zweiteilchenwechselwirkungen gewonnen. Wie von Lovelace, Mitra u.a. [2-4] gezeigt wurde, verringert sich bei Verwendung eines separablen Zweikörperpotentials die Dimension der Integralgleichungen des Dreikörperproblems in Partialwellenzerlegung von zwei auf eins, wobei die Zahl der Gleichungen mit dem Rang des separablen Potentials ansteigt. Dies bedeutet für Faddeev-Rechnungen mit separablen Potentialen von niedrigem Rang eine Verringerung des Rechenaufwands.

Separable Potentiale sind ein Spezialfall der Klasse der nichtlokalen Potentiale. Man spricht von einem separablen Potential vom Rang N, wenn das Potential die folgende Gestalt besitzt

$$V(\vec{r},\vec{r}') = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_i(\vec{r})\,\Lambda_{ij}\,\lambda_j(\vec{r}') \quad , \qquad (I.1)$$

wobei N eine endliche Zahl ist (und $\det \Lambda \neq 0$ gilt). Separable Potentiale haben den Nachteil sehr "unanschaulich" zu sein. Diese Tatsache steht u.a. im Zusammenhang mit der Tatsache, daß die Klasse der nichtlokalen Potentiale eine viel größere Flexibilität besitzt als die Klasse der lokalen. Zum Beispiel kann man mit einem separablen Potential einen Bindungszustand nach positiven Energien hin verschieben und ihn dem Streuspektrum überlagern. Trotzdem und zum Teil gerade wegen ihrer Flexibilität werden die separablen Potentiale auf dem Dreiteilchengebiet häufig verwendet. In der Kernphysik wurde ein separables Potential erstmalig von Yamaguchi [5] verwendet.

Eine Untersuchung der Wechselwirkungen zusammengesetzter Teilchen [6] hat die Bedeutung des off-shell Verhaltens dieser Wechselwirkungen aufgezeigt. Sowohl in der Resonating Group Methode [7] als auch im Fischgrätenmodell [8] wird das off-shell Verhalten stark vom Pauli-Prinzip beeinflußt. Das Pauli-Prinzip führt in beiden Modellen zu Potentialen von teilweise lokalem, teilweise nichtlokalem Charakter. Diese Potentiale sind jedoch immer noch zu kompliziert um gegenwärtig in Faddeev-Rechnungen Verwendung zu finden. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode anzugeben für die Konstruktion separabler Potentiale, die die on-shell und die off-shell Information dieser komplizierten Potentiale in einem bestimmten Energiebereich wiedergeben. Als Beispiel eines vorgegebenen Potentials wählen wir das optische Fischgrätenmodell, obwohl jedes andere Potential wie z.B. eines der bekannten Resonating Group Potentiale als Beispiel dienen könnte.

Das optische Fischgrätenmodell wird in Abschnitt II.1 abrißartig behandelt. In Abschnitt II.2 wird die unitäre Interpolationsmethode zur Konstruktion separabler Potentiale vorgestellt. Um diese Methode an einem numerischen Beispiel zu erproben, wird in Abschnitt III.1 ein separables Potential für die elastische α-α Streuung konstruiert. Als weiteres Beispiel wird in Abschnitt III.2 ein separables Potential für die elastische N-α Streuung konstruiert. Eine Zusammenfassung findet man in Abschnitt IV.

II.1 Das optische Fischgrätenmodell

Das optische Fischgrätenmodell [8] vereinigt die Vorteile der Resonating Group Methode mit denen des optischen Modells. Aufgrund seiner nichtlokalen Wechselwirkung berücksichtigt es das Pauli-Prinzip und dessen Einfluß auf das on-shell und das off-shell Verhalten der Wellenfunktion. Außerdem enthält es das Saito-Modell [9], wenn nur die total Pauli-verbotenen Zustände berücksichtigt werden. Eine besonders einfache Gestalt hat das optische Fischgrätenmodell im speziellen Fall des harmonischen Oszillatorgrenzfalls mit gleichem Weiteparameter für die beiden Cluster, wobei letzterer durch die Oszillatorfrequenz ω und die reduzierte Masse μ des Zweiteilchensystems bestimmt ist. In diesem Fall sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Resonating Group Normkerns für alle S-Schalencluster nach Zaikin [10] und für einige schwerere Kerne nach Horiuchi [11] gegeben. Die hermitesche Version des optischen Fischgrätenmodells [8] ist gegeben durch die Gleichung

$$\Big[T_l + V_{D,P} - E - \sum_{i,j=1}^{\infty} |u_{P,i}\rangle \langle u_{P,i}| (T_l + V_{D,P}) \; |u_{P,j}\rangle \bar{M}_{P,ij} \langle u_{P,j}| + \sum_{i=1}^{n} |u_{P,i}\rangle \varepsilon_{P,i} \langle u_{P,i}| \Big] |\bar{\chi}_P\rangle = 0. \qquad \text{(II.1.1)}$$

Dabei ist T_l der Operator der kinetischen Energie in der l-ten Partialwelle, definiert durch

$$T_l = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] , \qquad \text{(II.1.2)}$$

$V_{D,p}$ ist das lokale Direktpotential der Wechselwirkung zwischen den beiden Clustern, E ist die Relativenergie im Schwerpunktsystem, die Zustände $|u_{p,i}\rangle$ sind die Eigenzustände des Resonating Group Normkerns, und $|\bar{\chi}_p\rangle$ beschreibt die Relativbewegung der beiden Cluster in der l-ten Partialwelle. Die Matrix $\bar{M}_{p,ij}$ im nichtlokalen Anteil der Wechselwirkung ist bestimmt durch die Eigenwerte $\eta_{p,i}$ des Normkerns. Für einen Pauli-verbotenen Zustand (n = 1) hat die Matrix $\bar{M}_{p,ij}$ folgende Gestalt

$$\bar{M}_{p,ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1-\sqrt{\frac{1-\eta_{p,2}}{1-\eta_{p,3}}} & 1-\sqrt{\frac{1-\eta_{p,2}}{1-\eta_{p,4}}} & \cdots \\ 1 & 1-\sqrt{\frac{1-\eta_{p,2}}{1-\eta_{p,3}}} & 0 & 1-\sqrt{\frac{1-\eta_{p,3}}{1-\eta_{p,4}}} & \cdots \\ 1 & 1-\sqrt{\frac{1-\eta_{p,2}}{1-\eta_{p,4}}} & 1-\sqrt{\frac{1-\eta_{p,3}}{1-\eta_{p,4}}} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \qquad \text{(II.1.3)}$$

Der Index p bezeichnet einen Satz von Quantenzahlen

$$p \equiv (s, l, j, m) \qquad \text{(II.1.4)}$$

bestehend aus dem Kanalspin s, dem Relativbahndrehimpuls l, dem Gesamtdrehimpuls j und dessen z-Komponente m. Die Lösungen $|\bar{\chi}_p\rangle$ von (II.1.1) sind orthogonal zu den Pauli-verbotenen Zuständen $|u_{p,i}\rangle$ (i = 1,...,n)

$$\langle u_{p,i} | \bar{\chi}_p \rangle = 0 , \qquad \text{(II.1.5)}$$

wenn n die Zahl der Pauli-verbotenen Zustände ist. Dies wird dadurch erreicht, daß diese verbotenen Zustände zu Bindungszuständen bei positiven Energien gemacht werden. Die positiven Bindungsenergien werden durch die Größen $\varepsilon_{p,i}$ dargestellt, die für n Pauli-verbotene Zustände durch den Vektor

$$(\varepsilon_{p,i}) = (\varepsilon_{p,1}, \ldots, \varepsilon_{p,n}) \qquad \text{(II.1.6)}$$

festgelegt werden. Indem man diese Energien hoch genug wählt, werden diese verbotenen Zustände weit aus dem elastischen Streuspektrum hinausgeschoben, ohne daß die on-shell Eigenschaften der Wellenfunktion geändert werden [12].

Zur Abkürzung führen wir die effektiven Potentiale

$$U_p = \bar{V}_{D,p} - \sum_{i,j=1}^{\infty} |u_{p,i}\rangle\langle u_{p,i}|(T_\ell + \bar{V}_{D,p})|u_{p,j}\rangle \cdot \cdot \bar{M}_{p,ij}\langle u_{p,j}| + \sum_{i=1}^{n} |u_{p,i}\rangle \varepsilon_{p,i} \langle u_{p,i}| \qquad \text{(II.1.7)}$$

und

$$U_p^c = V_D^c - \sum_{i,j=1}^{\infty} |u_{p,i}\rangle\langle u_{p,i}| V_D^c |u_{p,j}\rangle M_{p,ij} \langle u_{p,j}| \qquad \text{(II.1.8)}$$

ein, die wir in den späteren Abschnitten benötigen. Gleichung (II.1.7) definiert das effektive Potential der starken Wechselwirkung, dessen lokaler Anteil mit $V_{D,p}$ bezeichnet ist, und Gleichung (II.1.8) definiert das effektive Coulombpotential mit seinem lokalen Anteil $V_D{}^c$. Mit diesen effektiven Potentialen läßt sich (II.1.1) schreiben als

$$\left[T_\ell + U_p + U_p^c - E\right]|\chi_p\rangle = 0 \,. \qquad \text{(II.1.9)}$$

Die doppelte Summation in (II.1.1) kann bei praktischen Rechnungen oberhalb einer bestimmten Grenze abgebrochen werden, da für höhere Werte der Summationsindizes entweder die Matrixelemente $\bar{M}_{p,ij}$ oder die Matrixelemente der Operatoren T_l und $\bar{V}_{D,p}$ $\langle u_{p,i} | (T_l + \bar{V}_{D,p}) | u_{p,j} \rangle$ nach Null streben. Numerische Tests haben gezeigt, daß im Falle der α-α Streuung die Summation bei i,j = 20 abgebrochen werden kann, ohne daß die Orthogonalität (II.1.5) dadurch beeinträchtigt wird.

Die Aufgabe der nächsten Abschnitte wird es sein, die Wechselwirkung des optischen Fischgrätenmodells separabel darzustellen.

II.2 Einige Vorbemerkungen zur separablen Wiedergabe von Potentialen

Ein Operator O kann formal in einer vollständigen Othonormalbasis entwickelt werden. Sei $\{|\phi_i\rangle\}$ ein diskreter Satz von Zuständen, die eine vollständige Orthonormalbasis im Hilbertraum darstellen. Dann läßt sich der Operator schreiben als

$$O = \sum_{i,k} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| O |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \qquad \text{(II.2.1)}$$

Ist O ein kompakter Operator , so kann man O durch eine endliche Anzahl von Gliedern der Entwicklung (II.2.1) approximieren

$$\tilde{O} = \sum_{i,k=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| O |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \qquad \text{(II.2.2)}$$

wobei $|\phi_1\rangle\langle\phi_1|$ Projektoren sind, die den Operator O auf den Unterraum des Hilbertraums projizieren, und $\tilde{O}$ ist der auf diesen Unterraum eingeschränkte Operator, der O separabel approximiert. Im folgenden stelle der Operator O ein kompaktes Potential dar, das im allgemeinen aus einem lokalen und einem nichtlokalen Anteil bestehen soll.

Bei der indirekten Approximation wird das nichtseparable Potential so approximiert, daß gewisse Eigenschaften des Integralkerns der Lippmann-Schwingergleichung in dem physikalisch interessierenden Energiebereich richtig wiedergegeben werden. Ein Spezialfall dieser indirekten Approximation ist die bekannte Unitary Pole Approximation [2,13] bzw. die Unitary Pole Expansion [14]. Im nächsten

Abschnitt wird ein Verfahren zur Konstruktion eines separablen Potentials vorgestellt, welches die Wiedergabe der Eigenschaften des nichtseparablen Potentials gewährleistet, auf die wir Wert legen. Diese Methode ist ähnlich einem Verfahren von Ernst, Shakin und Thaler [15], weicht aber dadurch von diesem ab, daß die Bindungszustände bei positiven Energien exakt wiedergegeben werden. Die Methode kann folgendermaßen gekennzeichnet werden: Anstatt der direkten Approximation des Potentials versuchen wir die Streuzustände $|\overline{\chi}_p\rangle$ zu approximieren, die dieses Potential erzeugt. Dabei werden Bindungszustände (sowohl die echten als auch diejenigen bei positiven Energien) generell exakt wiedergegeben, während die Streuzustände nur an einigen ausgewählten Stellen der Energie exakt wiedergegeben werden. Stellt man durch Nachprüfen fest, daß auch zwischen den Interpolationsenergien die Streufunktion gut wiedergegeben wird, so hat man ein separables Potential gefunden, das sowohl das on-shell als auch das off-shell Verhalten des ursprünglichen Potentials wiedergibt.

II.3 Die unitäre Interpolationsmethode

Der Anteil der starken Wechselwirkung in (II.1.1) bzw. (II.1.9) soll in seiner Wirkung auf die Wellenfunktion durch ein separables Potential der Form

$$V_p = \sum_{i,j=1}^{r} |\lambda_{p,i}\rangle \Lambda_{p,ij} \langle\lambda_{p,j}| \qquad \text{(II.3.1)}$$

approximiert werden. Der Index p bezeichnet den in Abschnitt II.1 definierten Satz von Quantenzahlen. Mit dem in (II.1.8) eingeführten effektiven Coulombpotential U_p^c und dem separablen Potential (II.3.1) lautet die Schrödingergleichung für die Relativbewegung der beiden Cluster

$$\left[T_\ell + U_p^c + \sum_{i,j=1}^{r} |\lambda_{p,i}\rangle \Lambda_{p,ij} \langle\lambda_{p,j}| - E\right] |\chi_p\rangle = 0 \qquad \text{(II.3.2)}$$

Um sowohl die on-shell als auch die off-shell Eigenschaften der optischen Fischgrätenwechselwirkung zu reproduzieren, werden die Formfaktoren $|\lambda_{p,i}\rangle (i = 1,\ldots,r)$ und die Kopplungsmatrix $\Lambda_{p,ij}$ aus folgenden Bedingungen berechnet:

i) Da die Pauli-verbotenen Zustände als Bindungszustände bei positiver Energie behandelt werden, finden sie zusammen mit den echten Bindungszuständen bei negativen Energien als Interpolationszustände Verwendung, d.h. die Schrödingergleichung mit dem separablen Potential (II.3.1) und dem effektiven Coulombpotential (II.3.2) soll alle Bindungszustände (einschließlich der Pauli-verbotenen Bindungszustände) des Wellenfunktionsspektrums $\bar{\chi}_p$ reproduzieren.

ii) Um das kontinuierliche Spektrum von $\bar{\tau}_p$ zu reproduzieren, wird von dem separablen Potential gefordert, daß es die Lösungen von (II.1.1) an m_p ausgesuchten Energiestellen reproduziert.

Wenn n_p die Zahl der Bindungszustände in der l-ten Partialwelle ist, erhält man für den Rang r des separablen Potentials

$$r_p = n_p + m_p . \qquad \text{(II.3.3)}$$

Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden der Index p bei r, n und m unterdrückt. Man hat also r Interpolationszustände $|\varphi_{p,i}\rangle$, (i = 1,...,r), bei r verschiedenen Interpolationsenergien

$$\begin{aligned}
|\varphi_{p,1}\rangle &= |u_{p,1}\rangle \;, \quad E_1 = \varepsilon_{p,1} \\
&\vdots \\
|\varphi_{p,n}\rangle &= |u_{p,n}\rangle \;, \quad E_n = \varepsilon_{p,n} \\
|\varphi_{p,n+1}\rangle &= |\bar{\tau}_{p,1}\rangle \;, \quad E_{n+1} \\
&\vdots \\
|\varphi_{p,r}\rangle &= |\bar{\tau}_{p,m}\rangle \;, \quad E_r \;.
\end{aligned} \qquad \text{(II.3.4)}$$

Die oben angeführten Bedingungen können in Form von r Gleichungen gefaßt werden

$$\left[T_l + U_p^c + \sum_{i,j=1}^{r} |\lambda_{p,i}\rangle \Lambda_{p,ij} \langle\lambda_{p,j}| - E_k\right] |\varphi_{p,k}\rangle = 0$$

$$(k = 1, \ldots, r) \;, \qquad \text{(II.3.5)}$$

aus denen die unbekannte Kopplungsmatrix $\Lambda_{p,ij}$ bestimmt wird.

Die Berechnung der Formfaktoren geschieht in zwei Schritten. Im ersten Schritt werden r Zustände $|\sigma_{p,i}\rangle$,(i = 1,...,r), berechnet über die Beziehung

$$|\sigma_{p,i}\rangle = \left[T_l + v_p^c - E_i\right] |\varphi_{p,i}\rangle \,, \qquad \text{(II.3.6)}$$

mit der Eigenschaft der Quadratintegrabilität

$$\langle \sigma_{p,i} | \sigma_{p,i} \rangle \quad < \infty \quad ,(i = 1, \ldots, r). \qquad \text{(II.3.7)}$$

Da diese Zustände als Ausgangsbasis für das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren dienen sollen, müssen sie linear unabhängig sein. Diese Forderung läßt sich leicht erfüllen, solange der Rang des separablen Potentials klein ist, d.h. die Dimension des durch die Interpolationszustände aufgespannten Raums klein ist gegen die Dimension des Raums aller Bindungszustände und Streuzustände. In der Praxis bedeutet die Forderung nach linearer Unabhängigkeit, daß im Streubereich die Interpolationsenergien nicht zu nahe beeinander liegen dürfen. Im zweiten Schritt der Konstruktion wird das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren zusammen mit einer Normierung auf die über (II.3.6) berechneten nichtorthogonalen Zustände angewandt, um die orthonormalen Formfaktoren $|\lambda_{p,i}\rangle$,(i = 1,...,r), zu erhalten. Bei der Wahl der Reihenfolge der Formfaktoren besteht eine gewisse Willkür, die dahingehend ausgenützt wird, als natürliche Ordnung die Zahl der Knoten in den Formfaktoren zu wählen. Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren definiert die Koeffizienten der Transformation

$$|\sigma_{p,i}\rangle = \sum_{k=1}^{r} S_{ki} |\lambda_{p,k}\rangle \quad , (i = 1, \ldots, r) , \qquad \text{(II.3.8)}$$

mit der Eigenschaft

$$S_{ki} = 0 \qquad \forall \quad k > i \; . \qquad \text{(II.3.9)}$$

Setzt man (II.3.6) und (II.3.8) in (II.3.5) ein so erhält man

$$|\sigma_{p,k}\rangle + \sum_{i,j=1}^{r} |\lambda_{p,i}\rangle \Lambda_{p,ij} \langle\lambda_{p,j}|\varphi_{p,k}\rangle = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \qquad \text{(II.3.10)}$$

Diese Gleichung kann man analysieren in der Basis der Formfaktoren, indem man von links mit den bra-Vektoren $\langle\lambda_{p,i}|, (i = 1, \ldots, r)$, multipliziert. Man erhält dann ein Gleichungssystem, das in Matrixschreibweise lautet

$$\mathbf{S} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} = 0 \; . \qquad \text{(II.3.11)}$$

Die Matrizen sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{S} = (S_{ik}) \qquad \text{(II.3.12a)}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_{p,ij}) \qquad \text{(II.3.12b)}$$

$$\mathbf{Y} = (\langle\lambda_{p,j}|\varphi_{p,k}\rangle) \; . \qquad \text{(II.3.12c)}$$

Aus der Orthogonalität der Formfaktoren und der Interpolationszustände folgt die Existenz von $\mathbf{Y}^{-1}$, und somit läßt sich aus (II.3.11) eindeutig die Kopplungsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ bestimmen

$$\boldsymbol{\Lambda} = -\mathbf{S}\mathbf{Y}^{-1} \; . \qquad \text{(II.3.13)}$$

Da S und Y reell sind, ist Λ ebenfalls reell. Die Symmetrie der Kopplungsmatrix Λ ist im Anhang gezeigt.

Damit liegt ein hermitesches separables Potential vom Rang r vor, das in allen seinen Teilen energieunabhängig ist, und das per constructionem den on-shell und den off-shell Effekt des Pauli-Prinzips auf die Wellenfunktion enthält. Andere Verfahren, wie z.B. das in Ref. [15] genannte Verfahren berücksichtigen das Pauli-Prinzip nicht explizit bei der Konstruktion der Formfaktoren und der Bestimmung der Kopplungskonstanten, sodaß das Pauli-Prinzip höchstens mittelbar über die Bindungsfunktionen und Streufunktionen in das separable Potential eingeht. Die vorgestellte Interpolationsmethode kann dagegen als Verallgemeinerung des in Ref. [15] beschriebenen Verfahrens durch Inkorporation des Pauli-Prinzips aufgefaßt werden.

Es sei an dieser Stelle noch einmal auf ein weiteres Merkmal der Interpolationsmethode hingewiesen: Wenn wir mit dem separablen Potential das optische Fischgräten-modell wiedergeben, dessen on-shell Verhalten an die experimentellen Daten angepaßt ist, erhalten wir ein Potential, das wir als Hybridpotential bezeichnen können, denn das on-shell Verhalten folgt aus dem Experiment, das off-shell Verhalten dagegen aus dem Pauli-Prinzip, d.h. aus der Theorie. Das Hybridpotential ist wie schon gesagt hermitesch, weshalb der Hamiltonoperator invariant ist gegenüber Zeitumkehr. Diese Tatsache erlaubt es die Interpolationsmethode unitär zu nennen. Da die Approximationsmethode nicht direkt über die Wechselwirkung läuft, sondern über die Wellenfunktion, ist die Interpolationsmethode auf keine spezielle Wechselwirkung beschränkt, sondern allgemein verwendbar um ein beliebiges nichtseparables Potential in seiner Wirkung auf die Wellenfunktion durch ein separables Potential zu approximieren.

III. Numerische Beispiele

Die in Abschnitt II.3 beschriebene Interpolationsmethode wurde zur Konstruktion eines Hybridpotentials für die elastische α-α und N-α Streuung verwendet. Den Ausgangspunkt für diese Konstruktion bildete in beiden Fällen das optische Fischgrätenmodell, dessen freie Potentialparameter dazu benutzt wurden, um die experimentellen Phasenkurven wiederzugeben. Für die Cluster wurden Grundzustände des harmonischen Oszillatormodells angenommen. Die Normkerneigenfunktionen sind in diesem Fall bekannt. Es sind Oszillatorfunktionen. Die Normkerneigenwerte $\eta_{l,i}$ sind von Horiuchi [11] bzw. Zaikin [10] angegeben.

Der Ortsanteil der α-Bindungswellenfunktion wird wie üblich [7,16] durch eine Gaußfunktion beschrieben

$$\varphi(\alpha) = N_\alpha \exp\left(-\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{4}\vec{r}_i^{\,2}\right), \qquad \text{(III.0.1)}$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N_\alpha = \left(\frac{a^3}{4\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}}. \qquad \text{(III.0.2)}$$

Dabei ist $\vec{\vec{r}}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_c$, $\vec{r}_i$ die Koordinate des i-ten Nukleons, $\vec{R}_c$ der Schwerpunkt und a der Weiteparameter des α-Clusters. Der Normierungsfaktor bezieht sich auf die Integration über die inneren Koordinaten (Jacobikoordinaten). Die symmetrische Ortsfunktion wird noch multipliziert mit einer total antisymmetrischen Spin-Isospinfunktion mit T = 0 und S = 0. Der Weiteparameter des α-Teilchens wurde zu a = 0.55 fm^{-2} gewählt, als numerischer Wert für $\hbar^2/2m$ wurde 20.75 MeV fm^2 verwendet, wobei m die Nukleonenmasse ist.

III.1 Die α-α Wechselwirkung

Im ersten Schritt wurde das optische Fischgrätenmodell an die experimentellen Streuphasen [17] angepaßt. Dabei wurde besonderen Wert auf die Wiedergabe der l = 0 Resonanz bei 92.14 keV gelegt. Für den lokalen Anteil der starken Wechselwirkung wurde ein Gaußpotential, zur Darstellung des lokalen Coulombpotentials eine Fehler-Funktion verwendet, so daß sich insgesamt für das lokale Direktpotential ergibt

$$V_D(r) = -V_0 \exp(-\gamma r^2) + \frac{4e^2}{r} \operatorname{erf}\left[(2a/3)^{1/2} r\right] \qquad \text{(III.1.1)}$$

mit der Tiefe V_0 = 108.41998 MeV und dem Weiteparameter γ = 0.18898 fm^{-2}. Das Coulombpotential hat keinen Fitting-parameter. Die Normkerneigenfunktionen sind Oszillator-funktionen mit dem Weiteparameter a = 0.55 fm^{-2}, und die Normkerneigenwerte sind $\eta_{0,1}$ = 1, 1, 1/4, 1/16, 1/64,..., $\eta_{2,1}$ = 1, 1/4, 1/16, 1/64,..., $\eta_{4,1}$ = 1/4, 1/16, 1/64,... . Das bedeutet, daß in der S-Welle zwei und in der D-Welle ein Eigenzustand des Normkerns durch das Pauli-Prinzip verboten sind. Sie werden zu Bindungszuständen bei positiven Energien gemacht. Als Bindungsenergien wurden $\varepsilon_{0,1}$ = 200 MeV, $\varepsilon_{0,2}$ = 250 MeV und $\varepsilon_{2,1}$ = 250 MeV gewählt. Die Bindungszustände liegen damit weit außerhalb des elastischen Energiebereichs. Mit diesen Parameterwerten erhält man die in Fig. 1 gezeigten Phasenkurven. Die experimentellen Werte sind der Ref. [17] entnommen.

Im nächsten Schritt wurde mit der unitären Interpolationsmethode ein separables Potential für die starke Wechselwirkung konstruiert, wie es in Abschnitt II.3 beschrieben ist. Das effektive Coulombpotential ist gegeben durch

$$V_\ell^C = \frac{4e^2}{r}\,\mathrm{erf}\left[(2\alpha/3)^{1/2} r\right] - \sum_{i,j=1}^{20} |u_{\ell,i}\rangle \cdot$$

$$\cdot \langle u_{\ell,i}| \frac{4e^2}{r}\,\mathrm{erf}\left[(2\alpha/3)^{1/2} r\right] |u_{\ell,j}\rangle \bar{M}_{\ell,ij} \langle u_{\ell,j}| \qquad \text{(III.1.2)}$$

Um die vorgegebenen Phasenkurven des optischen Fischgrätenmodells genügend gut wiederzugeben, waren in jeder Partialwelle zwei Interpolationszustände aus dem kontinuierlichen Spektrum erforderlich, zusätzlich zu den Bindungszuständen bei den Energien $\varepsilon_{o,1}$, $\varepsilon_{o,2}$ und $\varepsilon_{2,1}$, so daß sich der Rang r des separablen Potentials ergibt zu r = 4 für l = 0, r = 3 für l = 2 und r = 2 für l = 4 . Die Interpolationsenergien für die einzelnen Partialwellen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1: Interpolationsenergien E_i in MeV

l	E_1	E_2	E_3	E_4
0	200	250	0.092	15
2	250	5	15	—
4	10	20	—	—

Mit diesen Werten werden die Steuphasen im Energiebereich von 0 - 21 Mev bis auf ± 2.5 Grad (l = 0), ± 5.0 Grad (l = 2 und l = 4) wiedergegeben. Die größte Abweichung liegt in der Gegend der l = 2 und l = 4 Resonanzen, wo

der Gradient der Phasenkurven besonders groß ist. Graphisch ist diese Abweichung im Maßstab von Fig. 1 nicht sichtbar. Daher kann man ebensogut sagen, daß Fig. 1 die Phasenkurven des separablen Potentials zeigt. Wird der Rang des separablen Potentials herabgesetzt, indem man die Anzahl der Interpolationszustände im Kontinuum verringert, so vergrößert sich erwartungsgemäß die Abweichung der Phasenkurven gegenüber denen des optischen Fischgrätenmodells.

Die Kopplungsmatrizen für die einzelnen Partialwellen sind in den folgenden Tabellen angegeben.

Tabelle 2: Kopplungsmatrix $\mathbb{K}$ für l = 0

185.16326	- 15.99852	0.0	0.0
- 15.99852	210.10848	- 6.57035	- 1.45185
0.0	- 6.57035	- 55.26148	- 12.92307
0.0	- 1.45185	- 12.92307	- 11.32758

Tabelle 3: Kopplungsmatrix $\mathbb{K}$ für l = 2

211.72321	- 5.07539	- 0.92655
- 5.07539	- 51.23442	- 10.11914
- 0.92655	- 10.11914	- 10.61893

Tabelle 4: Kopplungsmatrix Λ für $l = 4$

- 41.77588	- 11.40350
- 11.4035	- 11.60257

Die Formfaktoren $|\lambda_{l,i}\rangle$ sind in der Basis der Normkerneigenfunktionen dargestellt. Die Koeffizienten der Entwicklung

$$|\lambda_{l,i}\rangle = \sum_k \alpha_{ik} |u_{l,k}\rangle \qquad \text{(III.1.3)}$$

sind in den folgenden drei Tabellen auf den nächsten Seiten aufgeführt.

Tabelle 5: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren in der Oszillatorbasis für $l = 0$

$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$	$\|\lambda_3\rangle$	$\|\lambda_4\rangle$
0.9971	0.0756	0.0092	- 0.0008
- 0.0762	0.9897	0.1200	- 0.0101
	- 0.1216	0.9830	- 0.0826
		0.1064	0.9501
		0.0877	- 0.2002
		- 0.0004	0.2130
		0.0151	- 0.0597
		- 0.0018	0.0372
		0.0027	- 0.0082
			0.0038

Tabelle 6: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren in der Oszillatorbasis für l = 2

$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$	$\|\lambda_3\rangle$
0.9949	0.1003	- 0.0088
- 0.1011	0.9866	- 0.0862
	0.1070	0.9436
	0.0702	- 0.2326
	0.0076	0.2077
	0.0073	- 0.0612
	0.0022	0.0319
		- 0.0048

Tabelle 7: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren in der Oszillatorbasis für l = 4

$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$
0.9937	0.0800
- 0.0444	0.9127
0.0956	- 0.3089
- 0.0296	0.2298
0.0213	- 0.0967
- 0.0083	0.0504
0.0046	- 0.0188
- 0.0018	0.0076
	- 0.0021

Die Entwicklung wurde abgebrochen, wenn die höheren Koeffizienten $\leq 1 \cdot 10^{-3}$ waren. Den graphischen Verlauf zeigen die Figuren 2-4.

Ein weiterer wichtiger Punkt der separablen Wechselwirkung ist, nachdem die Phasenkurven reproduziert sind, die Wiedergabe der Streufunktionen im Nahbereich, wo sich

die beiden Cluster überlappen. An den Interpolationsenergien werden die Wellenfunktionen per constructionem exakt wiedergegeben. Zwischen den Interpolationsenergien im Bereich von 0 - 20 MeV zeigen die Streufunktionen kleine Abweichungen, die in der Größenordnung der on-shell Abweichungen liegen. Die Fig. 5 zeigt einen Vergleich der beiden Streufunktionen bei l = 0, E = 8 MeV, und Fig. 6 zeigt einen Vergleich bei l = 2, E = 10 MeV. Die gewählten Energien liegen jeweils ungefähr in der Mitte zwischen zwei Interpolationsenergien.

Da man bei einigen Anwendungen den Grenzübergang $\varepsilon_{l,i} \to \infty$ vollziehen möchte, wurde das Verhalten der Kopplungskonstanten und Formfaktoren bei Änderung dieser Parameter untersucht. Dabei wurde in der S-Welle das Verhältnis $\varepsilon_{o,1}/\varepsilon_{o,2}$ festgehalten. Es zeigte sich, daß der Grenzübergang anhand numerischer Resultate durch Extrapolation durchgeführt werden kann. Man erhält für die Kopplungskonstanten $\Lambda_{l,ii}$, (i = 1,...,n)

$$\lim_{\varepsilon_{l,i} \to \infty} \Lambda_{l,ii} = \varepsilon_{l,i} \,, \qquad \text{(III.1.4)}$$

und für die Formfaktoren $|\lambda_{l,i}\rangle$, (i = 1,...,n)

$$\lim_{\varepsilon_{l,i} \to \infty} |\lambda_{l,i}\rangle = |u_{l,i}\rangle \qquad \text{(III.1.5)}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon_{l,i} \to \infty$ steht im Zusammenhang mit einer Arbeit von Kukulin [18]. Bei der Methode von Kukulin werden bei beliebig vorgegebenem Potential Pauli-verbotene Zustände mittels Projektionsoperatoren aus dem Lösungsspektrum herausprojiziert, indem Bindungszustände bei unendlich hoher Energie eingeführt werden. Tabelle 8 zeigt einige Werte der Kopplungskonstanten $\Lambda_{l,ii}$, (i = 1, ...,n), bei l = 0 und l = 2 für verschiedene Werte der Bindungsenergien $\varepsilon_{l,i}$.

Tabelle 8: Kopplungskonstanten $\Lambda_{l,ii}$, (i = 1,...,n), bei l = 0 und 2 für verschiedene Werte von $\varepsilon_{l,i}$

l = 0				l = 2	
$\varepsilon_{o,1}$	$\varepsilon_{o,2}$	$\Lambda_{o,11}$	$\Lambda_{o,22}$	$\varepsilon_{2,1}$	$\Lambda_{2,11}$
40	50	31.8321	- 47.4211	50	- 20.2164
100	125	87.5255	83.1422	125	87.3086
200	250	185.1633	210.1085	250	211.7231
400	500	384.0032	460.1939	500	460.9440
800	1000	783.4367	960.1438	1000	960.5077
2000	2500	1983.1027	2460.0950	2500	2460.2382
4000	5000	3982.9915	4960.0763	5000	4960.1474
20000	25000	19982.9033	24960.0605	25000	24960.0746
40000	50000	39982.8923	49960.0584	50000	49960.0655
80000	100000	79982.8868	99959.0574	100000	99959.0610

Eine Änderung der Bindungsenergien $\varepsilon_{l,i}$ macht sich erwartungsgemäß hauptsächlich in den Diagonalelementen $\Lambda_{l,ii}$, (i = 1,...,n), bemerkbar. Die Elemente $\Lambda_{l,ii}$ mit i > n ändern sich nur geringfügig über das Gleichungssystem (II.3.11), während die nichtdiagonalen Matrixelemente $\Lambda_{l,ni}$ mit i > n eine starke Änderung aufweisen, die auf eine Entkopplung des Formfaktors $|\lambda_{l,n}\rangle$ von den anderen hindeutet. Das Verhalten der übrigen Kopplungskonstanten

im Grenzübergang $\varepsilon_{1,i} \to \infty$ ist in der Tabelle für l = 0, und in der Tabelle 10 für l = 2 angegeben.

Tabelle 9: Kopplungskonstanten bei l = 0 für $\varepsilon_{0,1} \to \infty$ und $\varepsilon_{0,2} \to \infty$

+ ∞	0.0	0.0	0.0
0.0	+ ∞	0.0	0.0
0.0	0.0	- 53.1000	- 12.9930
0.0	0.0	- 12.9930	- 11.1680

Tabelle 10: Kopplungskonstanten bei l = 2 für $\varepsilon_{2,1} \to \infty$

+ ∞	0.0	0.0
0.0	- 49.7120	- 10.1631
0.0	- 10.1631	- 10.5175

Die Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren für den Grenzübergang $\varepsilon_{1,i} \to \infty$ sind in den Tabellen 11 und 12 aufgeführt.

Tabelle 11: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren für $l = 0$ im Grenzübergang $\varepsilon_{o,1} \to \infty$ und $\varepsilon_{o,2} \to \infty$

$\lvert\lambda_1\rangle$	$\lvert\lambda_2\rangle$	$\lvert\lambda_3\rangle$	$\lvert\lambda_4\rangle$
1.0	0.0	0.0	0.0
	1.0	0.0	0.0
		0.9880	- 0.0883
		0.1144	0.9470
		0.0943	- 0.2098
		0.0004	0.2147
			- 0.0616
			0.0376
			- 0.0085
			0.0039

Tabelle 12: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren für 1 = 2 im Grenzübergang $\varepsilon_{2,1} \to \infty$

$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$	$\|\lambda_3\rangle$
1.0	0.0	0.0
	0.9908	- 0.0905
	0.1126	0.9417
	0.0740	- 0.2380
	0.0081	0.2083
	0.0077	- 0.0619
	0.0023	0.0319
		- 0.0048

Bei exakter Behandlung besteht weder im Resonating Group Modell noch im Fischgrätenmodell eine Kopplung der Pauliverbotenen Zustände an das kontinuierliche Spektrum. Eine solche Kopplung kann sich jedoch einschleichen wenn Näherungen gemacht werden. So weiß man z.B., daß bei dem Robertson Verfahren [19] Bindungszustände positiver Energie zu Resonanzen werden. Auch im vorliegenden Fall wurde das Verhalten der Streuphase und der Streufunktion in der Umgebung der Energien $\varepsilon_{1,i}$ untersucht, und es wurden sehr scharfe Resonanzen mit einer Breite von $E \leq 0.001$ MeV festgestellt.

III.2 Die N-α Wechselwirkung

Wir verwenden auch in diesem Fall das optische Fischgrätenmodell als Ausgangspunkt für die Konstruktion des separablen Potentials. Da im N-α System eine Spin-Bahn Kraft wirkt, erweitern wir den Ansatz für das lokale Direktpotential um ein Spin-Bahn Potential der Form

$$V_{ls} = (\vec{l} \cdot \vec{s})\, V_{SB}\, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V(r) , \qquad \text{(III.2.1)}$$

mit

$$V(r) = -V_0 \exp(-\gamma r^2) . \qquad \text{(III.2.2)}$$

Dabei ist $\vec{l}$ bzw. $\vec{s}$ der Operator des Relativbahndrehimpulses bzw. des Gesamtspins des N-α Systems, und V_{SB} ist als Tiefe des Spin-Bahn Potentials ein freier Parameter. Insgesamt erhält man für das lokale Direktpotential

$$V_D(r) = -V_0 \exp(-\gamma r^2) - (\vec{l}\cdot\vec{s})\, \frac{2}{\gamma} V_{SB} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \exp(-\gamma r^2) . \qquad \text{(III.2.3)}$$

Bei Vorhandensein eines Spins sind die Partialwellen nicht mehr allein durch den Bahndrehimpuls l definiert, und wir müssen zu der allgemeinen Definition übergehen

$$\psi_p(r) = \frac{1}{r} \bar{\chi}_{l,j}(r)\, \mathcal{Y}^m_{ls_j}(\Omega) , \qquad \text{(III.2.4)}$$

wobei $\bar{\chi}_{l,j}$ den Radialanteil und $\mathcal{Y}^m_{ls_j}$ den Winkelanteil bezeichnet. Die verallgemeinerten Kugelfunktionen genügen den Eigenwertgleichungen

$$
\begin{aligned}
\vec{j}^{\,2}\, y^{m}_{\ell s j} &= j(j+1)\,\hbar^2\, y^{m}_{\ell s j} \\
j_z\, y^{m}_{\ell s j} &= m\,\hbar\, y^{m}_{\ell s j} \\
\vec{\ell}^{\,2}\, y^{m}_{\ell s j} &= \ell(\ell+1)\,\hbar^2\, y^{m}_{\ell s j} \\
\vec{s}^{\,2}\, y^{m}_{\ell s j} &= s(s+1)\,\hbar^2\, y^{m}_{\ell s j} \,.
\end{aligned}
\qquad \text{(III.2.5)}
$$

Außerdem stehen die y^{m}_{lsj} mit den gewöhnlichen Kugelflächenfunktionen Y^{m}_{l} über die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle lsm_l m_s | jm \rangle$ in Beziehung

$$
y^{m}_{\ell s j} = \sum_{m_\ell, m_s} | Y_\ell^{m_\ell} \rangle \, | s\, m_s \rangle \langle \ell s m_\ell m_s | j m \rangle \,. \qquad \text{(III.2.6)}
$$

Die Radialfunktion $\bar{\chi}_{l,j}(r) \equiv \bar{\chi}_p(r)$ ist Lösung der Fischgrätengleichung in Partialwellenzerlegung. Für die N-α Streuung werden im folgenden die Relativbahndrehimpulse $l = 0$ und $l = 1$ behandelt, d.h. die Partialwellen $^2S_{1/2}$, $^2P_{3/2}$ und $^2P_{1/2}$. Unter Verwendung der Beziehung

$$
(\vec{\ell} \cdot \vec{s}) = \frac{1}{2} \left(\vec{j}^{\,2} - \vec{\ell}^{\,2} - \vec{s}^{\,2} \right) \qquad \text{(III.2.7)}
$$

erhält man für die Schrödingerradialgleichung des optischen Fischgrätenmodells

$$
\left[T_\ell + U_{P,opt} - E \right] | \bar{\chi}_P \rangle = 0 \qquad \text{(III.2.8)}
$$

mit dem effektiven optischen Potential

$$
\begin{aligned}
V_{p_1\,opt} &= -V_0 \exp(-\gamma r^2) + \\
&+ \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) \right] \cdot V_{sB} \cdot \\
&\cdot \exp(-\gamma r^2) + \frac{Q_1 Q_2}{r} \operatorname{erf}\left[\left(\frac{4a_1}{3}\right)^{1/2} r \right] - \\
&- \sum_{i,j=1}^{20} |u_{p_1 i}\rangle \langle u_{p_1 i}| \Big\{ T_\ell - V_0 \exp(-\gamma r^2) + \\
&+ \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) \right] V_{sB} \exp(-\gamma r^2) + \\
&+ \frac{Q_1 Q_2}{r} \operatorname{erf}\left[\left(\frac{4a_1}{3}\right)^{1/2} r \right] - \varepsilon_{p_1 i} \Big\} |u_{p_1 j}\rangle \bar{M}_{p_1 ij} \langle u_{p_1 j}| \, .
\end{aligned}
\qquad \text{(III.2.9)}
$$

Dabei ist in der Coulombwechselwirkung die Größe a_1 der Weiteparameter des α-Teilchens. Für die n-α Streuung fällt der Coulombanteil wegen $Q_2 = 0$ weg.

Die Eigenfunktionen des Normkerns sind wiederum harmonische Oszillatorfunktionen. Bei Annahme des gleichen α-Teilchenweiteparameters wie bei der α-α Streuung ergibt sich der Weiteparameter $a_{N-\alpha}$ der Normkerneigenfunktionen nach Horiuchi [11] zu $a_{N-\alpha} = 0.22\ fm^{-2}$. Die Eigenwerte des Normkerns sind nach Horiuchi [11] bzw. Zaikin [10] gegeben durch

$$
\eta_{\ell,n} = \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{\ell} \qquad \text{(III.2.10)}
$$

mit der Hauptquantenzahl n und dem Relativbahndrehimpuls l. Man erhält damit für die $^2S_{1/2}$-Welle $\eta_{o,i}$ = 1, 1/16, 1/256, ..., und für die $^2P_{3/2}$- und die $^2P_{1/2}$-Welle $\eta_{1,i}$ = 1/4, -1/ 64, -1/1024, ... Als Bindungsenergie für den Pauliverbotenen Zustand in der $^2S_{1/2}$-Welle wurde $\varepsilon_{o,1}$ = 50 MeV

gewählt. Die in Fig.7 dargestellten Phasenkurven für die elastische p-α Streuung und die in Fig. 8 für die elastische n-α Streuung erhält man mit den Parameterwerten V_o = 69.0 MeV als Tiefe des Gaußpotentials und γ = 0.28 fm^{-2} als dessen Weiteparameter. Die experimentellen Werte sind der Ref. [20] entnommen.

Für die Konstruktion des separablen Potentials wurde das effektive Coulombpotential

$$V_p^c = \frac{Q_1 Q_2}{r} \operatorname{erf}\left[\left(\frac{4\alpha_1}{3}\right)^{1/2} r\right] - \sum_{i,j=1}^{20} |u_{p,i}\rangle \langle u_{p,i}| \frac{Q_1 Q_2}{r} \operatorname{erf}\left[\left(\frac{4\alpha_1}{3}\right)^{1/2} r\right] |u_{p,j}\rangle \bar{M}_{p,ij} \langle u_{p,j}| \qquad \text{(III.2.11)}$$

verwendet. Mit zwei Interpolationszuständen aus dem kontinuierlichen Spektrum konnten die Streuphasen in jeder Partialwelle im Energiebereich von 0 - 20 MeV sehr gut wiedergegeben werden. Für die p-α Streuung beträgt die Abweichung in besagtem Energiebereich 0.1 Grad in der $^2S_{1/2}$-Welle, 0.4 Grad in der $^2P_{3/2}$- und der $^2P_{3/2}$-Welle. Für die n-α Streuung beträgt die Abweichung 0.1 Grad in der $^2S_{1/2}$-Welle, 1.3 Grad in der $^2P_{3/2}$-Welle und 0.5 Grad in der $^2P_{1/2}$-Welle. Der Rang r des separablen Potentials ist r = 3 für l = 0 und r = 2 für l = 1. Die Interpolationsenergien für die N-α Streuung sind der Tabelle 13 zu entnehmen.

Tabelle 13: Interpolationsenergien E_i in MeV der N-α Streuung

	E_1	E_2	E_3
$^2S_{1/2}$	50	5	15
$^2P_{3/2}$	5	15	—
$^2P_{1/2}$	10	20	—

Die Kopplungsmatrizen der p-α Wechselwirkung unterscheiden sich nur wenig von denen der n-α Wechselwirkung. Auch die Formfaktoren unterscheiden sich so wenig, daß der Unterschied in der graphischen Darstellung in den Fig. 9-11 bzw. den Fig. 12-14 kaum zu sehen ist. Die Kopplungsmatrizen der N-α Wechselwirkung für die einzelnen Partialwellen sind in den folgenden Tabellen aufgeführt:

Tabelle 14: Koplungsmatrizen $\mathbb{V}$ für die $^2S_{1/2}$-Welle

p - α			n - α		
34. 8668	-11.4526	-1.9877	34.8756	-11.4453	-1.8177
-11.4526	-36.0919	-11.7416	-11.4453	-36.2243	-11.3068
-1.9877	-11.7416	-13.2561	-1.8177	-11.3068	-12.8303

Tabelle 15: Kopplungsmatrizen Λ für die $^2P_{3/2}$-Welle

p - α		n - α	
-38.6364	-6.1865	-39.2333	-5.9011
-6.1865	-7.1068	-5.9011	-7.4135

Tabelle 16: Kopplungsmatrizen Λ für die $^2P_{1/2}$-Welle

p - α		n - α	
-23.5467	-4.9644	-24.0258	-4.8152
-4.9644	-5.5066	-4.8152	-5.6354

Genau wie in Abschnitt III.1 werden die Formfaktoren in der Basis der Normkerneigenfunktionen dargestellt. Die Koeffizienten der Entwicklung

$$|\lambda_{p,i}\rangle = \sum_k \alpha_{ik} |u_{p,k}\rangle \qquad \text{(III.2.12)}$$

sind für die einzelnen Partialwellen den Tabellen 17-19 zu entnehmen.

Tabelle 17: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren in der Oszillatorbasis, $^2S_{1/2}$-Welle

p - α			n - α		
$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$	$\|\lambda_3\rangle$	$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$	$\|\lambda_3\rangle$
0.9203	0.3472	- 0.1695	0.9203	0.3450	- 0.1736
- 0.3912	0.8167	- 0.3988	- 0.3912	0.8115	- 0.4085
	0.4050	0.5707		0.4119	0.5604
	0.1850	0.5781		0.1926	0.5751
	0.1000	0.3200		0.1048	0.3247
	0.0538	0.1837		0.0569	0.1881
	0.0297	0.1039		0.0316	0.1071
	0.0167	0.0596		0.0179	0.0618
	0.0095	0.0349		0.0102	0.0364
	0.0055	0.0205		0.0060	0.0215
	0.0032	0.0123		0.0035	0.0129
	0.0019	0.0074		0.0021	0.0079
	0.0011	0.0045		0.0013	0.0047
		0.0027			0.0029
		0.0017			0.0018
		0.0011			0.0012

Tabelle 18: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren in der Oszillatorbasis, $^2P_{3/2}$-Welle

p - α		n - α	
$\lvert\lambda_1\rangle$	$\lvert\lambda_2\rangle$	$\lvert\lambda_1\rangle$	$\lvert\lambda_2\rangle$
0.8185	- 0.5728	0.0851	- 0.5911
0.4589	0.6579	0.4733	0.6298
0.2919	0.3666	0.3003	0.3753
0.1549	0.2660	0.1617	0.2747
0.0842	0.1503	0.0884	0.1578
0.0466	0.0864	0.0493	0.0913
0.0263	0.0503	0.0279	0.0534
0.0151	0.0296	0.0161	0.0316
0.0087	0.0178	0.0094	0.0190
0.0051	0.0106	0.0055	0.0115
0.0031	0.0065	0.0033	0.0070
0.0018	0.0040	0.0020	0.0043
0.0011	0.0025	0.0012	0.0027
	0.0015		0.0016
			0.0011

Tabelle 19: Entwicklungskoeffizienten der Formfaktoren in der Oszillatorbasis, $^2P_{1/2}$-Welle

p - α		n - α	
$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$	$\|\lambda_1\rangle$	$\|\lambda_2\rangle$
0.8819	- 0.4662	0.8699	- 0.4892
0.3767	0.7757	0.3951	0.7531
0.2492	0.3348	0.2579	0.3443
0.1170	0.2262	0.1236	0.2346
0.0582	0.1130	0.0619	0.1197
0.0299	0.0588	0.0321	0.0627
0.0158	0.0316	0.0171	0.0339
0.0086	0.0174	0.0093	0.0188
0.0047	0.0099	0.0052	0.0108
0.0026	0.0056	0.0029	0.0061
0.0015	0.0032	0.0017	0.0036
	0.0019		0.0022
	0.0011		0.0013

Die Entwicklung (III.2.12) wurde abgebrochen, wenn höhere Koeffizienten $\leq 1 \cdot 10^{-4}$ waren.

Um die Wirkung der separablen Potentiale auf die Streufunktion im Nahbereich zu sehen, wurde für jede Partialwelle der N-α Streuung an einer Energie, die zwischen bzw. außerhalb von zwei Interpolationspunkten liegt, eine Streufunktion des separablen Potentials mit der entsprechenden Streufunktion des optischen Fischgrätenmodells verglichen. Die Fig. 15 zeigt diesen Vergleich für die p-α Streuung in der $^2S_{1/2}$-Welle bei E = 10 MeV, Fig. 16 in der $^2P_{3/2}$-Welle bei E = 10 MeV und Fig. 17 in der $^2P_{1/2}$-Welle bei E = 5 MeV. Die Fig. 18-20 zeigen diesen Vergleich für die n-α Streuung an denselben Energien.

Daß eine gute Wiedergabe der Streuphasen nicht unbedingt zu einer guten Wiedergabe der Streufunktion führen muß, ist in Fig. 21 gezeigt. Die Fig. 21 zeigt für die n-α Streuung in der Partialwelle $^2S_{1/2}$ bei E = 4.8 MeV einen Vergleich der Streufunktion berechnet mit einem separablen Potential von Lamot u.a. [21] (gestrichelte Kurve) und der entsprechenden Streufunktion, die mit unserem separablen Potential (durchgezogene Kurve) berechnet wurde. Lamot, Fayard und Charnomordic haben ihr separables Potential dem Experiment angepaßt. Die Wiedergabe der Streuphase ist ebenso gut wie im vorliegenden Fall, aber die Streufunktionen sind im Wechselwirkungsbereich sehr verschieden. Dieser Unterschied in der Streufunktion kann natürlich von einem dritten Teilchen gesehen werden, das mit dem Paar wechselwirkt. Es wird interessant sein bei künftigen Faddeev-Rechnungen am n-p-α System zu sehen, ob dieser Unterschied sich zufällig herausmittelt, oder ob er einen starken Einfluß auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt haben wird.

IV. Zusammenfassung und Diskussion

Die unitäre Interpolationsmethode kann eine große Klasse von Potentialen separabel darstellen. Sie wurde zwar am optischen Fischgrätenmodell demonstriert, kann aber auch genausogut die Resonating Group Potentiale oder auch andere Potentiale separabel wiedergeben. Das separable Potential ist hermitesch und in allen seinen Teilen energieunabhängig.

Bei geeigneter Wahl der Interpolationsenergien ist es möglich, nicht nur die Phasenkurven eines vorgegebenen Modells recht gut wiederzugeben, sondern auch die Wellenfunktionen im Nahbereich, wo sie sehr sensitiv sind für den Einfluß des Pauli-Prinzips. Die Wiedergabe dieses off-shell Effekts auf die Wellenfunktion im Innenraum wird erreicht durch die Verwendung der Pauli-verbotenen Zustände als Interpolationszustände bei positiver Bindungsenergie zusammen mit den echten Bindungszuständen und ausgewählten Streuzuständen. Da die Observablen eines Dreikörpersystems stark abhängen von dem off-shell Verhalten der Zweikörperwechselwirkungen, ist es interessant zu sehen, was bei kommenden Faddeev-Rechnungen mit den neuen Potentialen sich ergeben wird.

Am Beispiel der α-α Wechselwirkung und der N-α Wechselwirkung für die elastische Streuung konnte die Arbeitsweise des Interpolationsverfahrens erfolgreich aufgezeigt werden. In beiden Fällen werden nicht nur die Phasenkurven, sondern auch die Wellenfunktionen des optischen Fischgrätenmodells durch ein separables Potential von einem maximalen Rang 4 bzw. Rang 3 auf Anhieb gut reproduziert. Schwierigkeiten mit der linearen Unabhängigkeit der nichtorthogonalen Zustände $|\sigma_{p,k}\rangle$, $(k = 1,\ldots,r)$, wurden selbst bei höherrangigem separablen Potential nicht beobachtet.

Die Wahl der Interpolationsenergien hat keinen großen Einfluß auf die Qualität der Approximation. Ein numerischer Test hat gezeigt, daß eine Veränderung der Interpolationsenergien die Phasenkurven kaum beeinflußt. Am geschicktesten geht man vor, wenn man automatisch Bindungsenergien zu Interpolationsenergien macht, und die Interpolationsenergien im Kontinuum in die Nähe von Resonanzen legt.

Bisher wurde die unitäre Interpolationsmethode nur auf die Wechselwirkung leichter Kerne mit einer maximalen Nukleonenzahl von A = 4 angewendet. Schwerere Kerne im Oszillatorgrenzfall haben bedeutend mehr Pauli-verbotene Zustände, z.B. besitzt der Normkern der ^{16}O-^{16}O Wechselwirkung in der S-Welle zwölf Eigenwerte $\eta_{o,i} = 1$. Entsprechend erhöht sich der Rang des separablen Potentials. Für die vorligende Interpolationsmethode bildet dieser Umstand keine Schwierigkeiten, bei den Faddeev-Rechnungen ist es aber noch offen, ob man bei solchen Kernen mit separablen Potentialen rechnen will.

Anhang

An allen bisher gerechneten Beispielen hat sich gezeigt, daß ein hermitesches Ausgangspotential zu einem hermiteschen separablen Potential führt, wie dies auch zu erwarten ist [22]. Daß das Interpolationsverfahren generell diese Eigenschaft hat, sieht man den Gleichungen in Abschnitt II.3 nicht sofort an. Deshalb wird im folgenden diese Eigenschaft bewiesen.

Der Beweis der Hermitezität der Kopplungsmatrix $\mathbb{\Lambda}$ wird in zwei Schritte aufgeteilt. Im ersten Schritt wird die Hermitezität eines separablen Potentials mit der Kopplungsmatrix X in der Basis der nichtorthogonalen Zustände $|\sigma_{p,k}\rangle$, $(k = 1,\ldots,r)$, gezeigt, und im zweiten Schritt wird die Matrix X in die Matrix $\mathbb{\Lambda}$ aus Abschnitt II.3 übergeführt.

Wir gehen aus von der Äquivalenz der in Abschnitt II.3 definierten Gleichungen für die Interpolationszustände

$$\left[T_\ell + U_p + U_p^c - E_k\right]|\varphi_{p,k}\rangle = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

und $(k = 1,\ldots,r)$

$$\left[T_\ell + U_p^c + \sum_{i,j=1}^{r} |\sigma_{p,i}\rangle X_{p,ij} \langle\sigma_{p,j}| - E_k\right]|\varphi_{p,k}\rangle = 0, \qquad \text{(A.2)}$$

wobei die $|\sigma_{p,k}\rangle$ die nichtorthogonalen Zustände sind, die über die Beziehung

$$|\sigma_{p,k}\rangle = \left[T_\ell + U_p^c - E_k\right]|\varphi_{p,k}\rangle \qquad \text{(A.3)}$$

berechnet werden, und $X_{p,ij}$ die Kopplungsmatrix in der Basis dieser Zustände ist. Mit (A.1) und dem Anteil der starken Wechselwirkung

$$U_p = \bar{V}_{D,P} - \sum_{i,j=1}^{\infty} |u_{p,i}\rangle\langle u_{p,i}|(\bar{T}_l + \bar{V}_{D,P})|u_{p,j}\rangle \bar{M}_{p,ij} \langle u_{p,j}| \qquad (A.4)$$

des optischen Fischgrätenmodells läßt sich (A.3) umformen in

$$|\sigma_{p,k}\rangle = -U_p\,|\varphi_{p,k}\rangle\,, \quad (k = 1, \ldots, r)\,. \qquad (A.5)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Partialwellenindex p im folgenden unterdrückt. Wir definieren zu Abkürzung

$$-U_{ij} := -\langle\varphi_i\,|\,U\,|\varphi_j\rangle \qquad (A.6a)$$

$$= \langle\sigma_i\,|\,\varphi_j\rangle\,, \quad (i,j = 1, \ldots, r) \qquad (A.6b)$$

wobei wegen der Hermitezität von U gilt $U_{ji} = U_{ij}$. Die Äquivalenz von (A.1) und (A.2) führt mit (A.6a) bzw. (A.6b) auf r Gleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1\rangle &- |\sigma_1\rangle(X_{11}U_{11} + X_{12}U_{21} + \ldots + X_{1r}U_{r1}) - \\ &- |\sigma_2\rangle(X_{21}U_{11} + X_{22}U_{21} + \ldots + X_{2r}U_{r1}) - \\ &\vdots \\ &- |\sigma_r\rangle(X_{r1}U_{11} + X_{r2}U_{21} + \ldots + X_{rr}U_{r1}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (A.7.1)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_r\rangle &- |\sigma_1\rangle(X_{11}U_{1r} + X_{12}U_{2r} + \ldots + X_{1r}U_{rr}) - \\ &- |\sigma_2\rangle(X_{21}U_{1r} + X_{22}U_{2r} + \ldots + X_{2r}U_{rr}) - \\ &\vdots \\ &- |\sigma_r\rangle(X_{r1}U_{1r} + X_{r2}U_{2r} + \ldots + X_{rr}U_{rr}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (A.7.r)$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, falls in der k-ten Gleichung, (k = 1,...,r), die Faktoren hinter allen $|\sigma_i\rangle$, (i = 1,..., r, i ≠ k), einzeln verschwinden, d.h. wenn gilt

$$\left.\begin{aligned} X_{11}U_{11} + X_{12}U_{21} + \ldots + X_{1r}U_{r1} &= 1 \\ X_{21}U_{11} + X_{22}U_{21} + \ldots + X_{2r}U_{r1} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad & \vdots \\ X_{r1}U_{11} + X_{r2}U_{21} + \ldots + X_{rr}U_{r1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A.8.1)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} X_{11}U_{1r} + X_{12}U_{2r} + \ldots + X_{1r}U_{rr} &= 0 \\ X_{21}U_{1r} + X_{22}U_{2r} + \ldots + X_{2r}U_{rr} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad & \vdots \\ X_{r1}U_{1r} + X_{r2}U_{2r} + \ldots + X_{rr}U_{rr} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (A.8.r)$$

Dies sind r Gleichungen, die sich zusammenfassen lassen in der Matrixgleichung

$$\mathbf{X}\,\mathbf{U} = \mathbf{1}\,, \qquad (A.9)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{X} = (X_{ij}) \qquad (A.10a)$$

$$\mathbf{U} = (U_{jk})\,. \qquad (A.10b)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1}\,. \qquad (A.11)$$

Da die Interpolationszustände so gewählt werden, daß die

quadratintegrablen Zustände $|\sigma_i\rangle$ linear unabhängig sind, existiert $\mathbf{U}^{-1}$. Wegen der Hermitezität von $\mathbf{U}$ und der Einheit gilt für die transponierte Gleichung von (A.9)

$$\mathbf{U}\,\mathbf{X}^{t} = \mathbf{1} \quad , \tag{A.12}$$

und somit

$$\mathbf{X}^{t} = \mathbf{X} \quad , \tag{A.13}$$

d.h. die Kopplungsmatrix X in der Basis der nichtorthogonalen Zustände $|\sigma_i\rangle$ ist hermitesch.

Im nächsten Schritt wird die Matrix X auf die Orthonormalbasis der Formfaktoren $|\lambda_i\rangle$, (i = 1,...,r), transformiert und unter Verwendung der in Abschnitt II.3 definierten Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Y}$ die Identität mit der durch (II.3.13) definierten Matrix $\mathbf{\Lambda}$ gezeigt. Die Transformation zwischen der $\langle\sigma|$-Basis und der $\langle\lambda|$-Basis lautet in Matrixschreibweise

$$\langle\sigma| = \mathbf{S}\,\langle\lambda| \tag{A.14a}$$

bzw. für die transponierten Zustandsvektoren

$$|\sigma\rangle = |\lambda\rangle\,\mathbf{S}^{t} \quad , \tag{A.14b}$$

wobei $|\sigma\rangle$ und $|\lambda\rangle$ Zeilen- bzw. $\langle\sigma|$ und $\langle\lambda|$ Spaltenvektoren darstellen. Damit geht das in (A.2) definierte separable Potential über in die Darstellung

$$V = \sum_{i,j=1}^{r} |\lambda_i\rangle\,\Lambda_{ij}\,\langle\lambda_j| \quad , \tag{A.15}$$

mit der Kopplungsmatrix

$$\Lambda = S^t X S \; . \tag{A.16}$$

Für die transponierte Matrix ergibt sich somit

$$\Lambda^t = (S^t X S)^t = S^t X S$$

$$= \Lambda \; . \tag{A.17}$$

Um die Identität mit der Matrix (II.3.13) zu zeigen, wird (A.9) von links mit S^t multipliziert und $S S^{-1}$ zwischen X und U eingeschoben

$$S^t = S^t X S S^{-1} U \; . \tag{A.18}$$

Wegen $U = (U_{ij}) = (-\langle \sigma_i | \varphi_j \rangle)$ und $\langle \lambda | = S^{-1} \langle \sigma |$ erhält man aus (A.18)

$$S^t = - Y^t \Lambda \; , \tag{A.19}$$

mit der Matrix

$$Y^t = (\langle \varphi_i | \lambda_j \rangle) . \tag{A.20}$$

Durch Transposition der Matrizen in (A.19) erhält man schließlich nach Multiplikation mit Y^{-1} von rechts

$$- S Y^{-1} = \Lambda \; , \tag{A.21}$$

womit die Identität mit (II.3.13) gezeigt ist.

Literatur

1. L.D. Faddeev, JETP 12 (1961) 1014
2. C. Lovelace, Phys. Rev. 135, B1225 (1964)
3. A.N. Mitra, Nucl. Phys. 32 (1962) 529
4. A.N. Mitra, V.S. Bashin, Phys. Rev. 131, 1265 (1963)
5. Y. Yamaguchi, Phys. Rev. 95 (1954) 1628; 1635
6. E.W. Schmid, Phys. Rev. C 21, 691 (1980)
7. K. Wildermuth, Y.C. Tang, A Unified Theory of the Nucleus, in Clustering Phenomena in Nuclei (Vieweg, Braunschweig, 1977), Vol. 1
8. E.W. Schmid, Z. Physik A, 297, 105 (1980)
9. S. Saito, Progr. Theor. Phys. 41, 705 (1969)
10. D.A. Zaikin, Nucl. Phys. A 170, 584 (1971)
11. H. Horiuchi, Suppl. Progr. Theor. Phys. 62, 90 (1977)
12. Numerische Tests haben ergeben, daß sowohl die Phasenwerte wie auch die Funktionswerte der Streufunktion im on-shell Bereich durch die Wahl der positiven Bindungsenergien unbeeinflußt bleiben.
13. M.G. Fuda, Nucl. Phys. A 116 (1968), 83
14. E. Harms, Phys. Rev. C 1, 1667 (1970)
15. D.J. Ernst, C.M. Shakin, R.M. Thaler, Phys. Rev. C 8, 46 (1973)

16. E.W. Schmid, Invited lecture, presented at the "Workshop on Few Body Problems in Nuclear Physics", Trieste, Italy, March 13-17, 1978

17. S.A. Afzal, A.A. Ahmad, S. Ali, Rev. Mod. Phys. 41, 247 (1969)

18. V.M. Krasnopols'ky, V.I. Kukulin, Yad. Fiz. 20 (1974) 883; Izv. Akad. SSSR (ser. fiz.) 39 (1975) 148

19. H.H. Robertson, Proc. of Camb. Phil. Soc. 52 (1956) 538

20. G.R. Satchler, L.W. Owen, A.J. Elwyn, G.L. Morgan, R.L. Walter, Nucl. Phys. A 112, 1 (1968)

21. B.Charnomordic, C. Fayard, G.H. Lamot, Phys. Rev. C 15, 864 (1977)

22. E.W. Schmid, private Mitteilung. Die Symmetrie der Kopplungsmatrix Λ folgt aus der Symmetrie der vorgegebenen Fischgrätenwechselwirkung. Dies wurde für den speziellen Fall eines separablen Potentials vom Rang 2 explizit gezeigt, und für den allgemeinen Fall der Beweisweg beschrieben.

Verzeichnis der Abbildungen

Fig. 1 : Phasenkurven der α-α Streuung für l = 0,2,4 berechnet mit dem optischen Fischgrätenmodell; die experimentellen Werte sind der Ref. [17] entnommen.

Fig. 2 : Formfaktoren des separablen Potentials (α-α Streuung) für l = 0.

Fig. 3 : Formfaktoren des separablen Potentials (α-α Streuung) für l = 2.

Fig. 4 : Formfaktoren des separablen Potentials (α-α Streuung) für l = 4.

Fig. 5 : Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_0$ der α-α Streuung bei l = 0 und E = 8 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 6 : Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_2$ der α-α Streuung bei l = 2 und E = 10 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 7 : Phasenkurven der p-α Streuung für die Partialwellen $^2S_{1/2}$, $^2P_{3/2}$ und $^2P_{1/2}$ berechnet mit dem optischen Fischgrätenmodell; die experimentellen Werte sind der Ref. [20] entnommen.

Fig. 8 : Phasenkurven der n-α Streuung für die Partialwellen $^2S_{1/2}$, $^2P_{3/2}$ und $^2P_{1/2}$ berechnet mit dem optischen Fischgrätenmodell; die experimentellen Werte sind der Ref. [20] entnommen.

Fig. 9 : Formfaktoren des separablen Potentials (p-α Streuung) für die Partialwelle $^2S_{1/2}$.

Fig. 10: Formfaktoren des separablen Potentials (p-α Streuung) für die Partialwelle $^2P_{3/2}$.

Fig. 11: Formfaktoren des separablen Potentials (p-α Streuung) für die Partialwelle $^2P_{1/2}$.

Fig. 12: Formfaktoren des separablen Potentials (n-α Streuung) für die Partialwelle $^2S_{1/2}$.

Fig. 13: Formfaktoren des separablen Potentials (n-α Streuung) für die Partialwelle $^2P_{3/2}$.

Fig. 14: Formfaktoren des separablen Potentials (n-α Streuung) für die Partialwelle $^2P_{1/2}$.

Fig. 15: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{o,1/2}$ der p-α Streuung in der $^2S_{1/2}$-Welle bei E = 10 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 16: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{1,3/2}$ der p-α Streuung in der $^2P_{3/2}$-Welle bei E = 10 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 17: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{1,1/2}$ der p-α Streuung in der $^2P_{1/2}$-Welle bei E = 5 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 18: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{o,1/2}$ der n-α Streuung in der $^2S_{1/2}$-Welle bei E = 10 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 19: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{1,3/2}$ der n-α Streuung in der $^2P_{3/2}$-Welle bei E = 10 MeV: Vergleich der unitären

Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 20: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{1,1/2}$ der n-α Streuung in der $^2P_{1/2}$-Welle bei E = 5 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem optischen Fischgrätenmodell (gestrichelte Kurve).

Fig. 21: Relativwellenfunktion $\bar{\chi}_{o,1/2}$ der n-α Streuung in der $^2S_{1/2}$-Welle bei E = 4.8 MeV: Vergleich der unitären Interpolationsmethode (durchgezogene Kurve) mit dem separablen Potential aus Ref. [21] (gestrichelte Kurve).

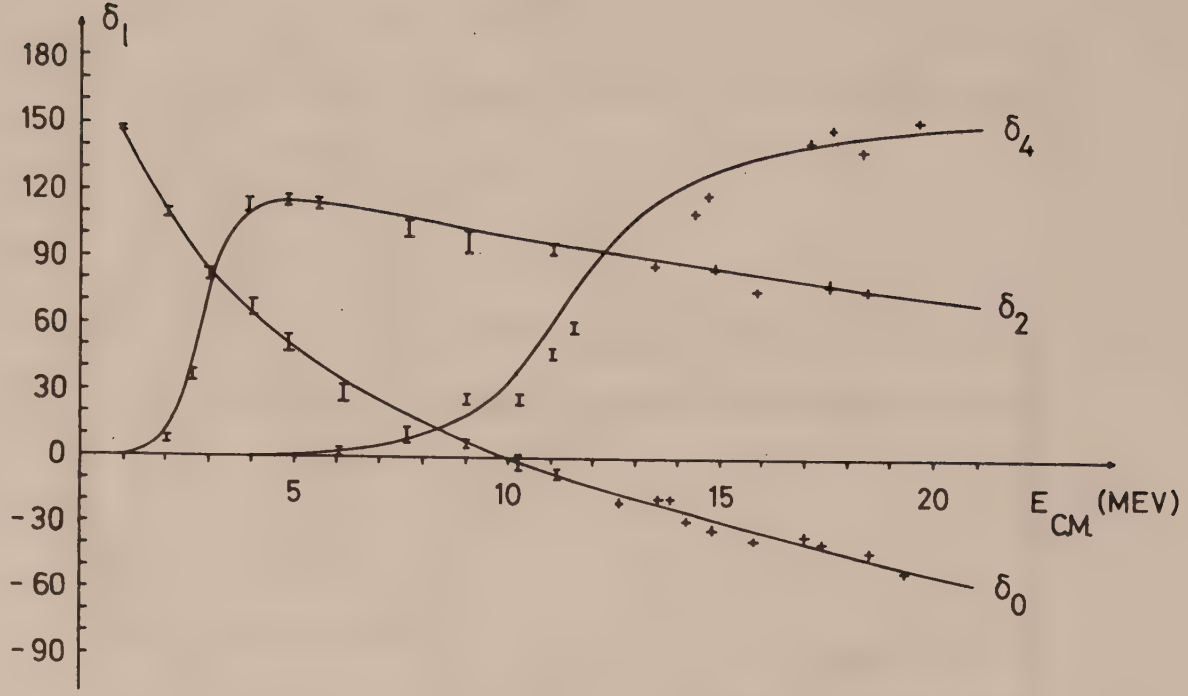

Fig. 1

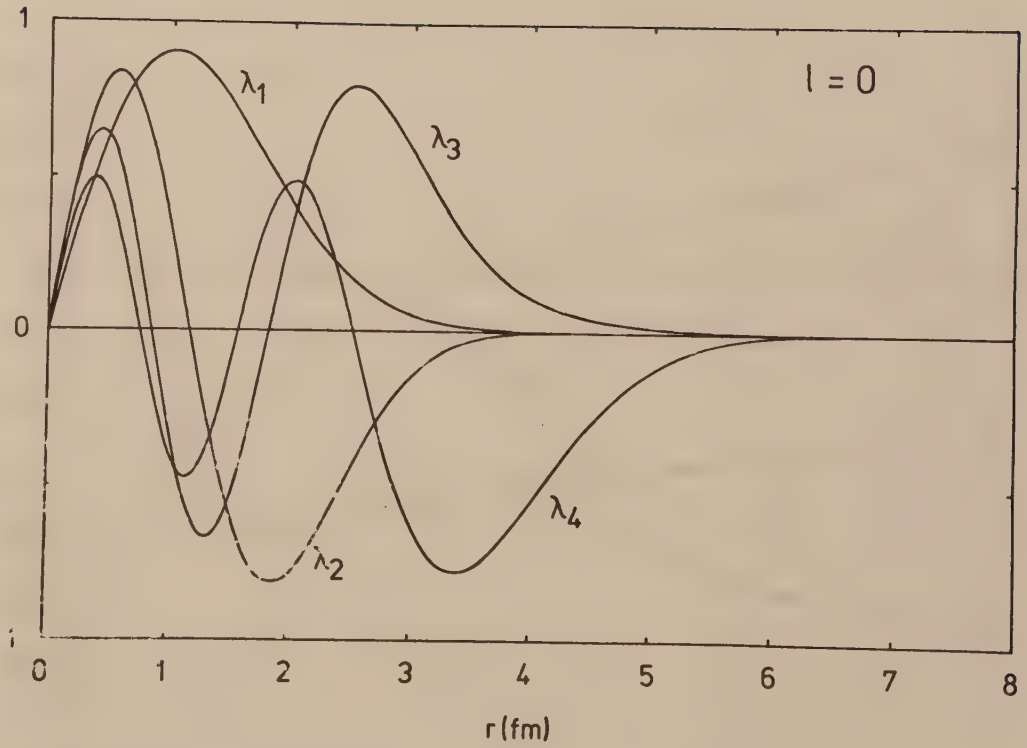

Fig. 2

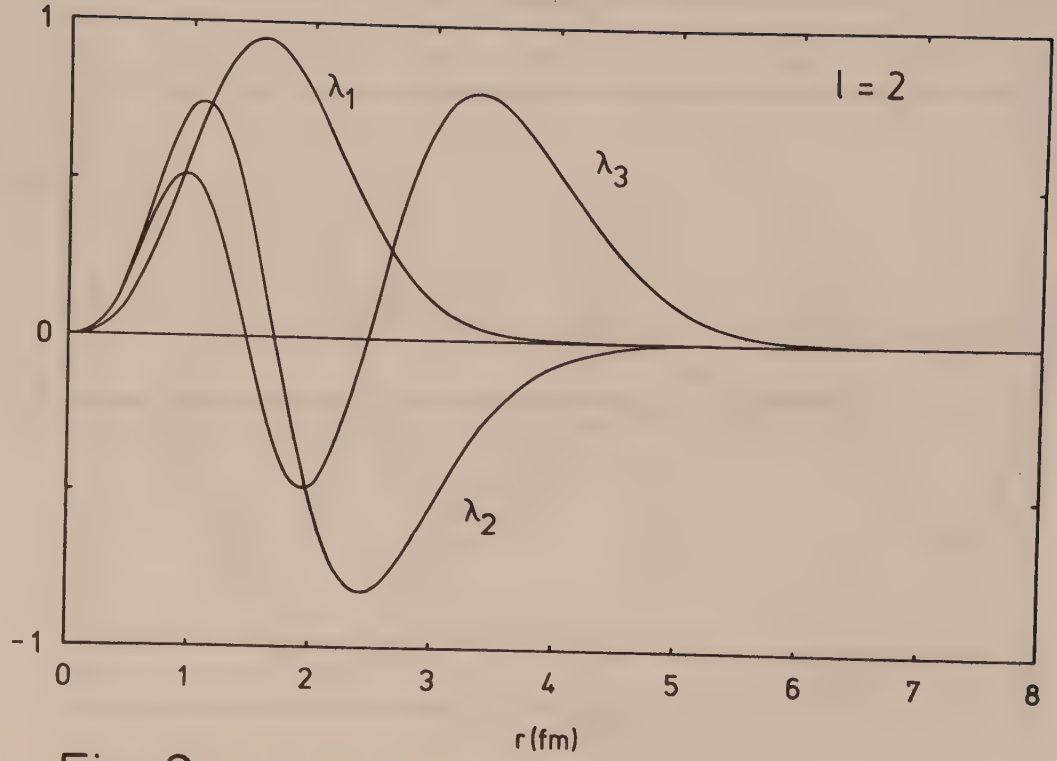

Fig. 3

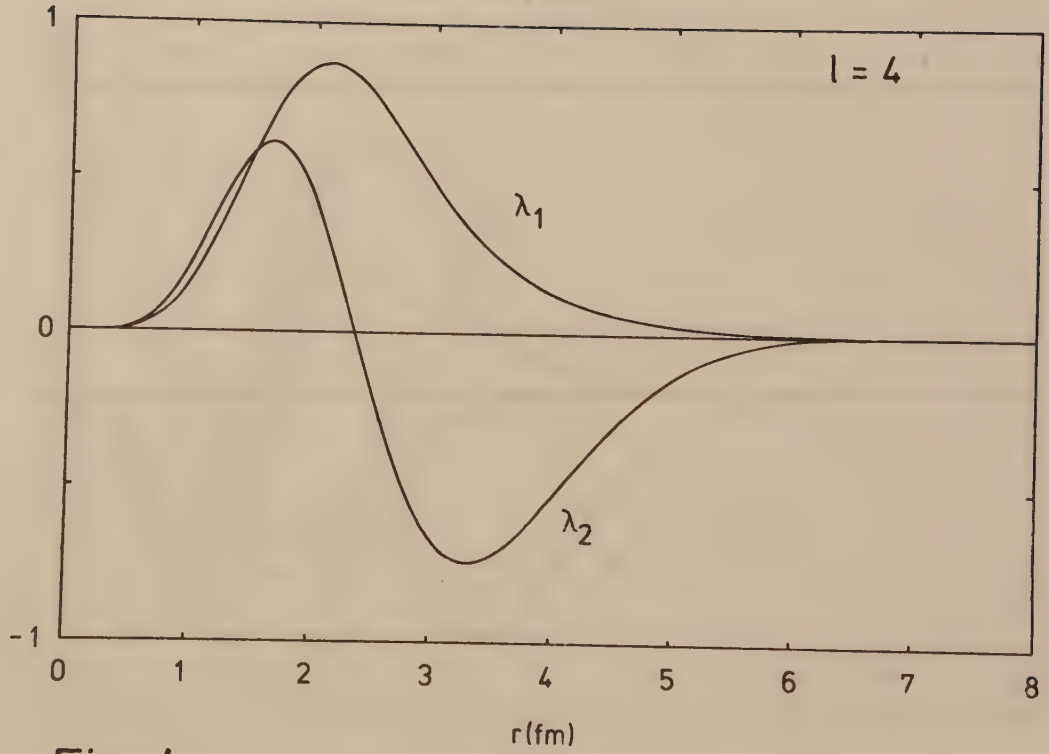

Fig. 4

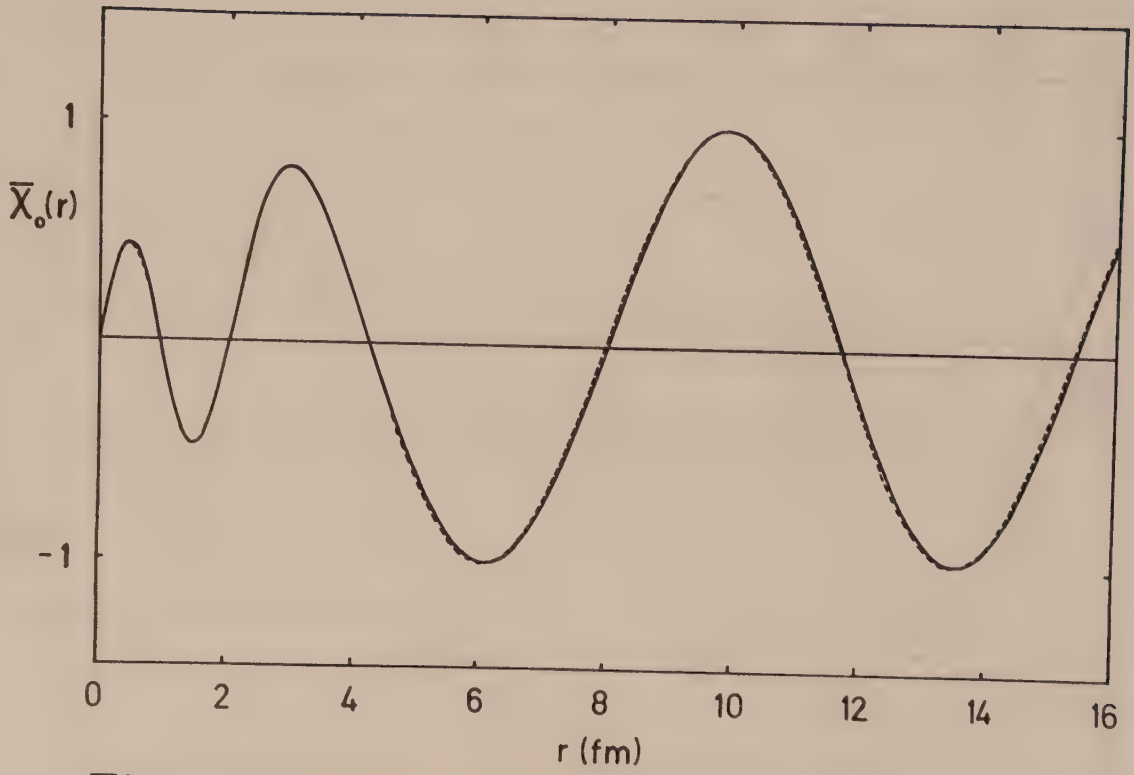

Fig.5

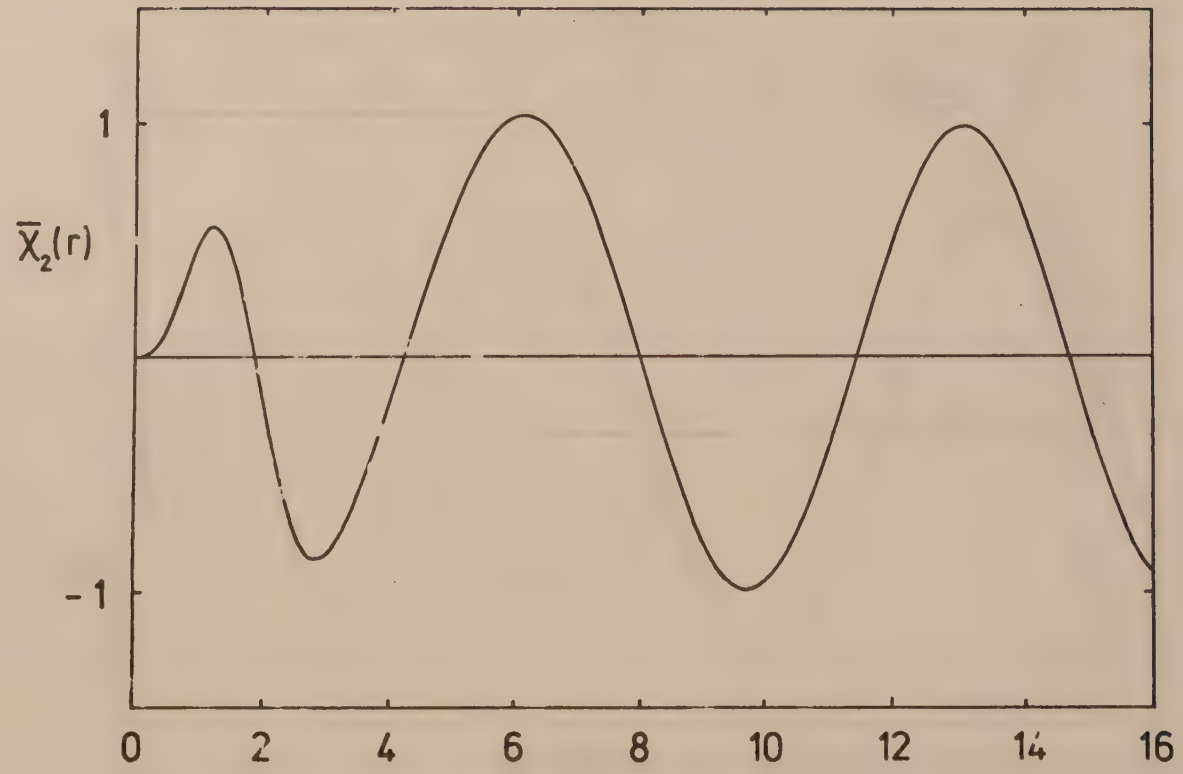

Fig. 6

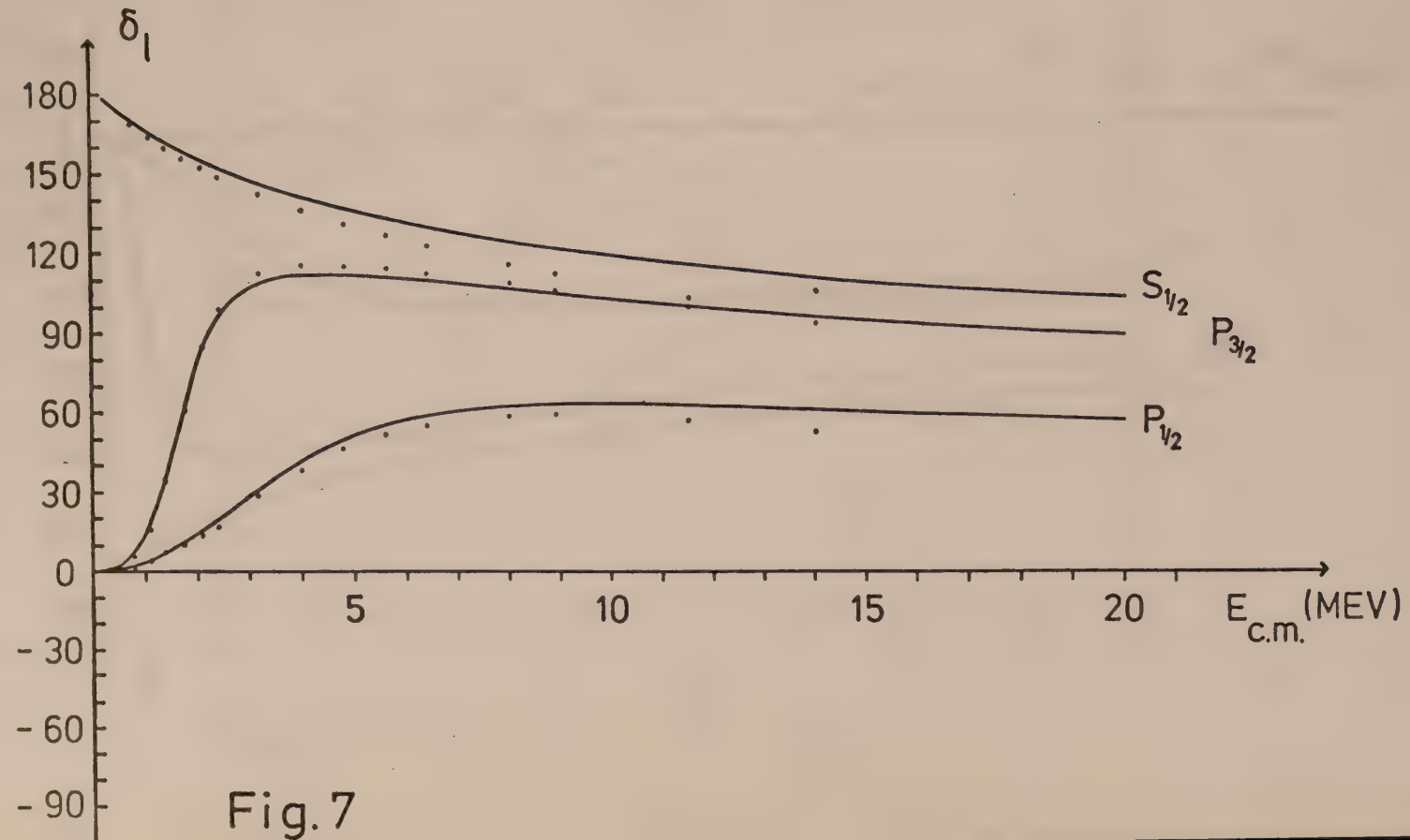
δ_l
180
150
120
90
60
30
0
- 30
- 60
- 90
5
10
15
20
$E_{c.m.}$ (MEV)
$S_{1/2}$
$P_{3/2}$
$P_{1/2}$

Fig. 7

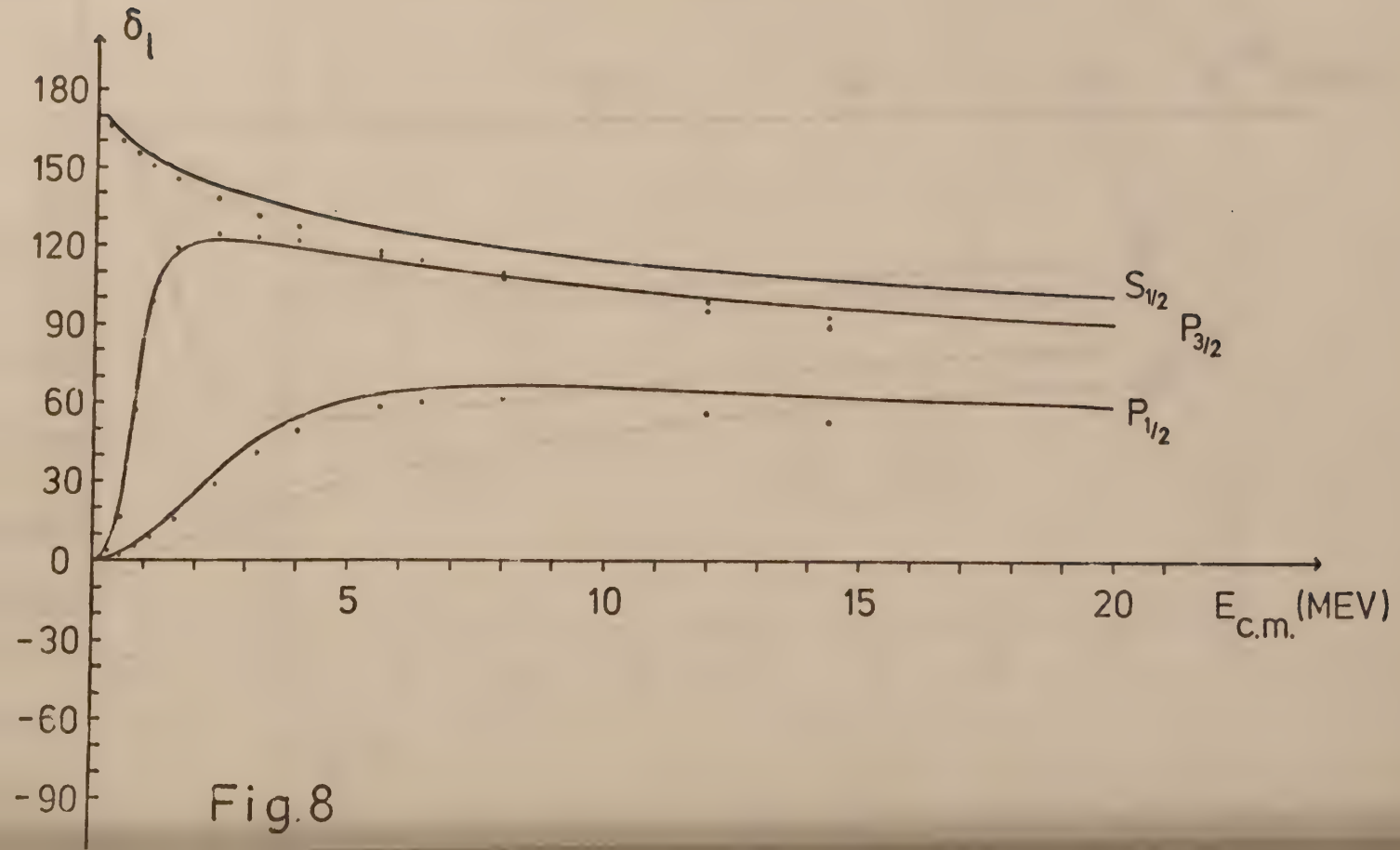
δ_l
180
150
120
90
60
30
0
-30
-60
-90
5
10
15
20
$E_{c.m.}$ (MEV)
$S_{1/2}$
$P_{3/2}$
$P_{1/2}$

Fig.8

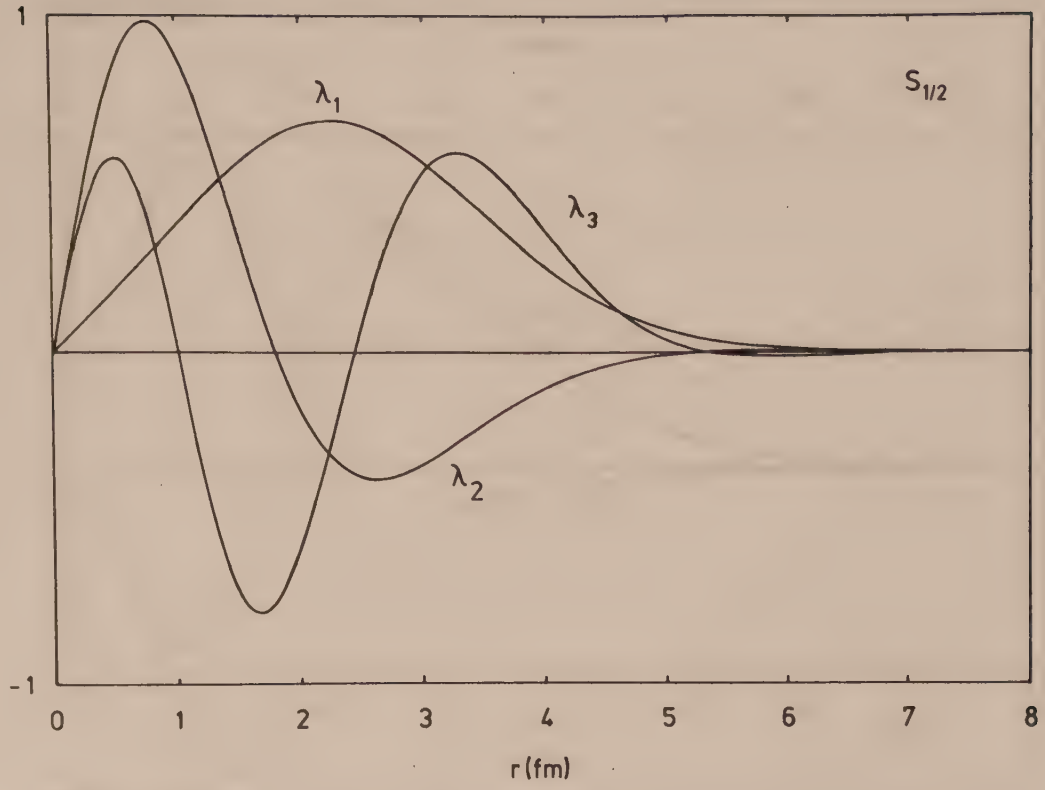

Fig.9

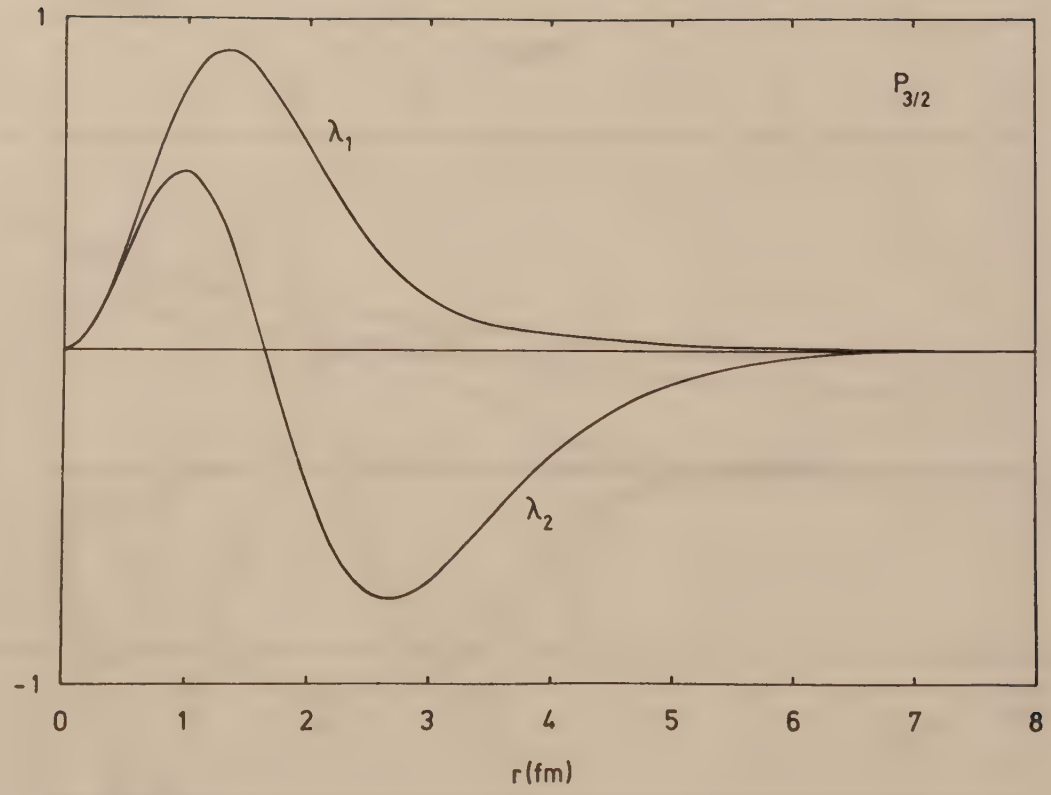

Fig.10

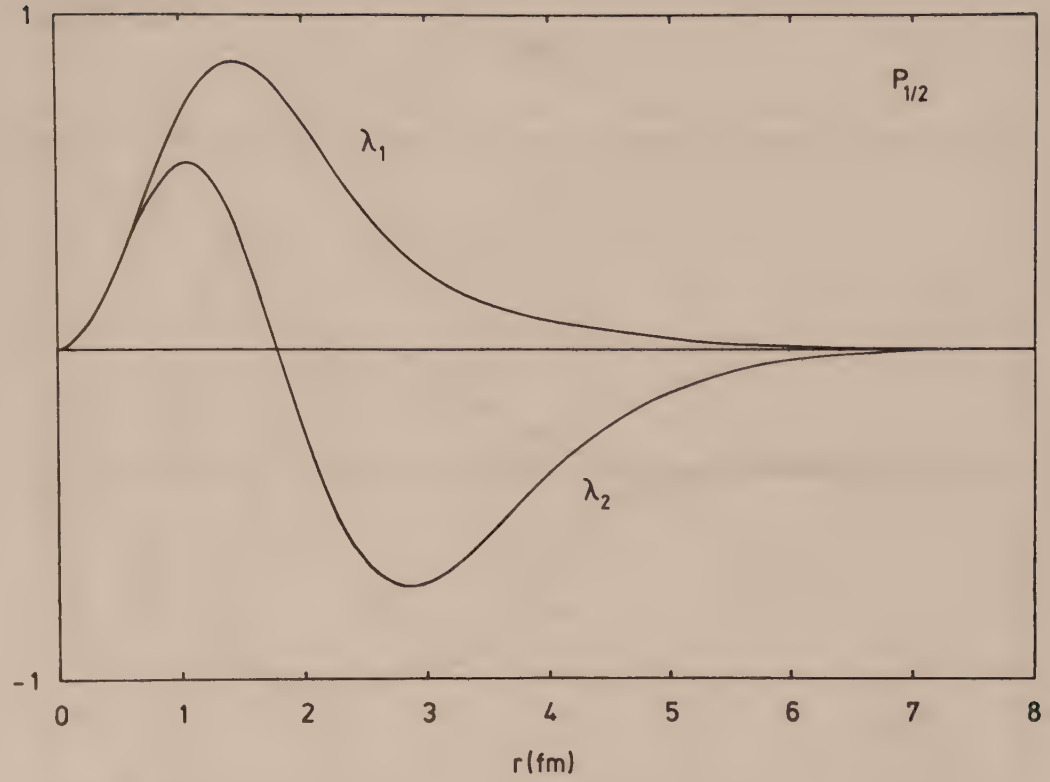

Fig. 11

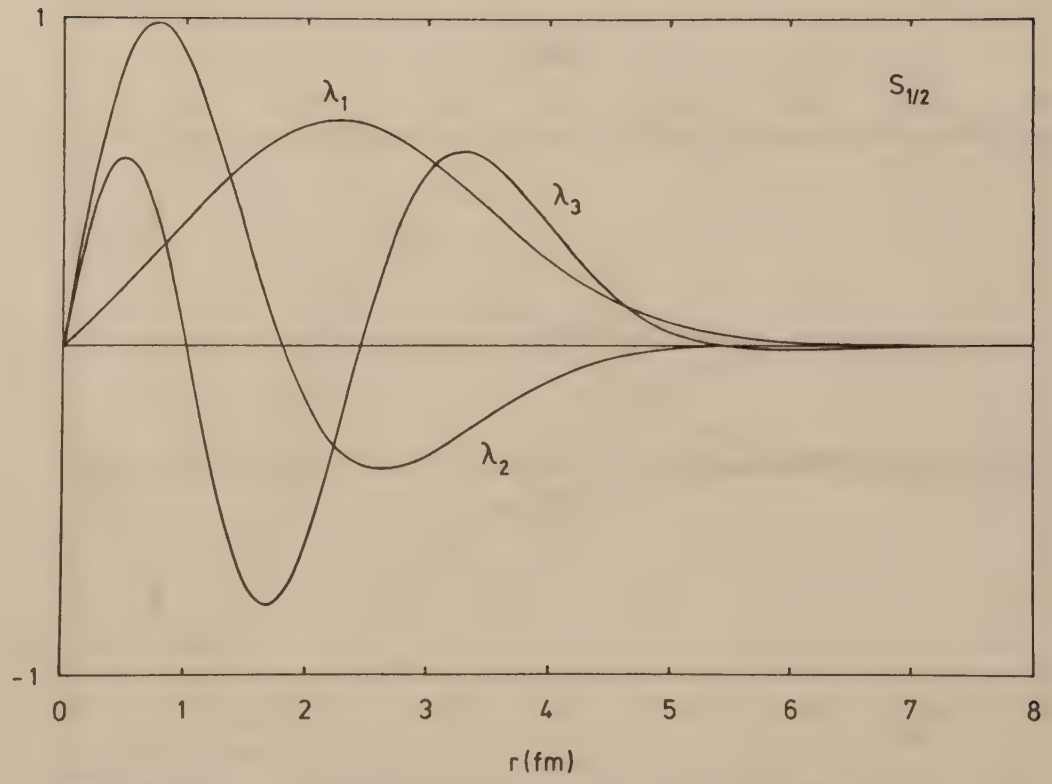

Fig.12

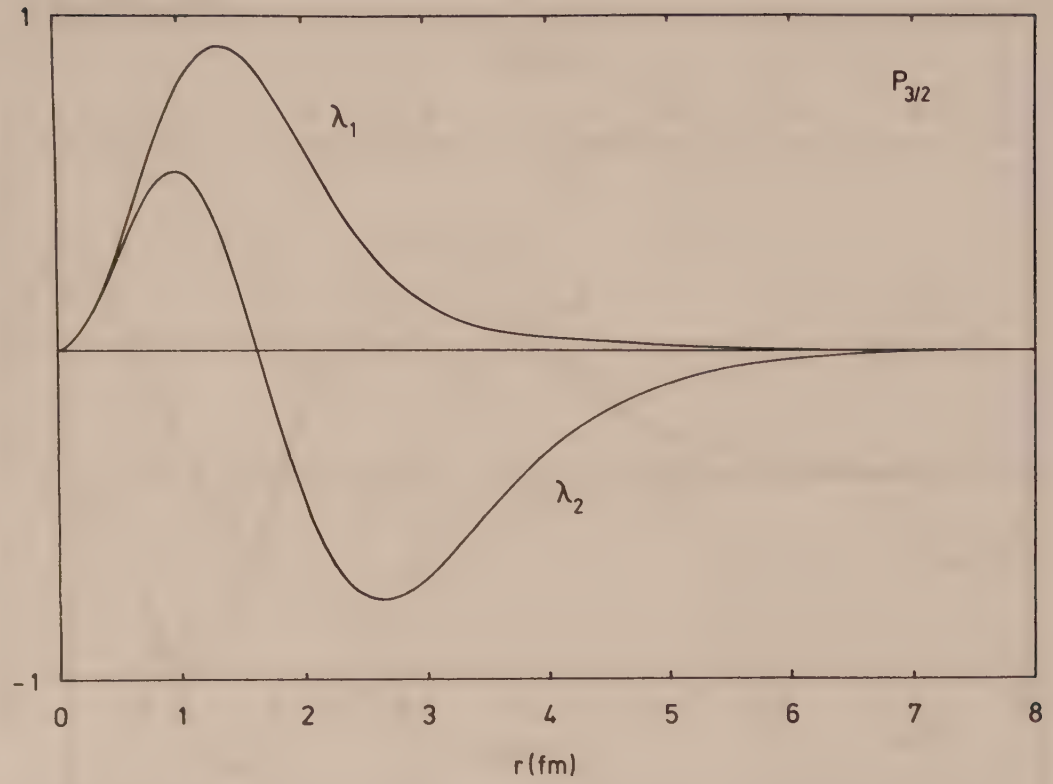

Fig. 13

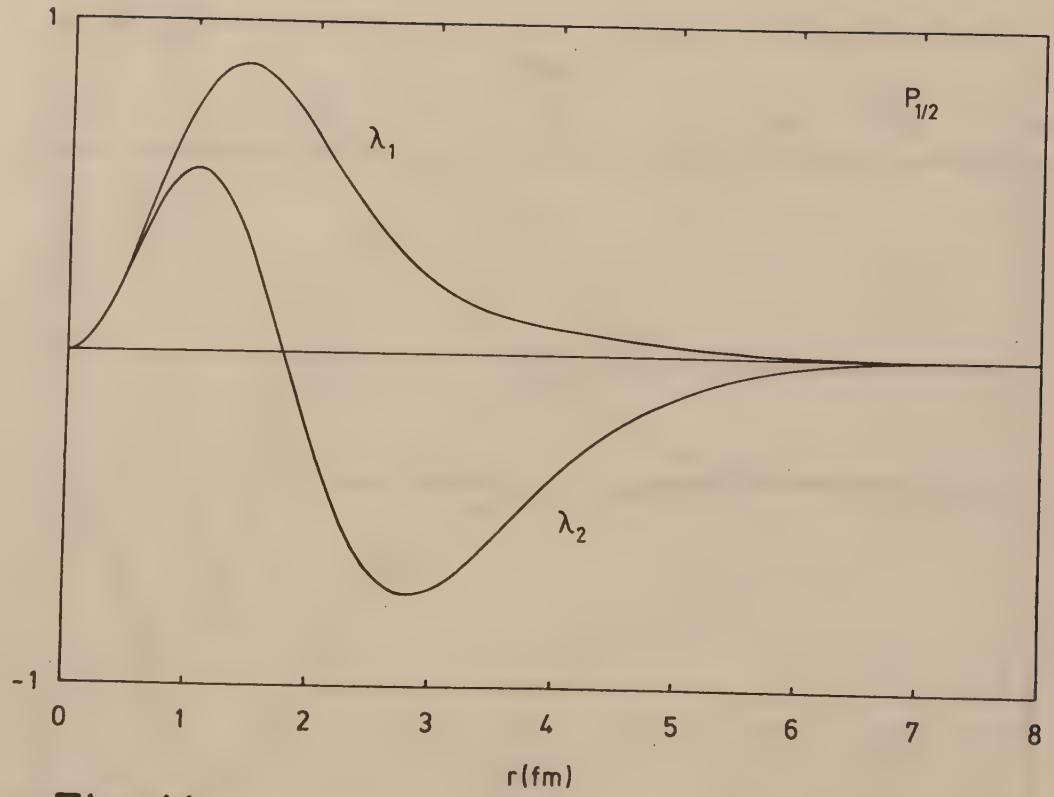

Fig. 14

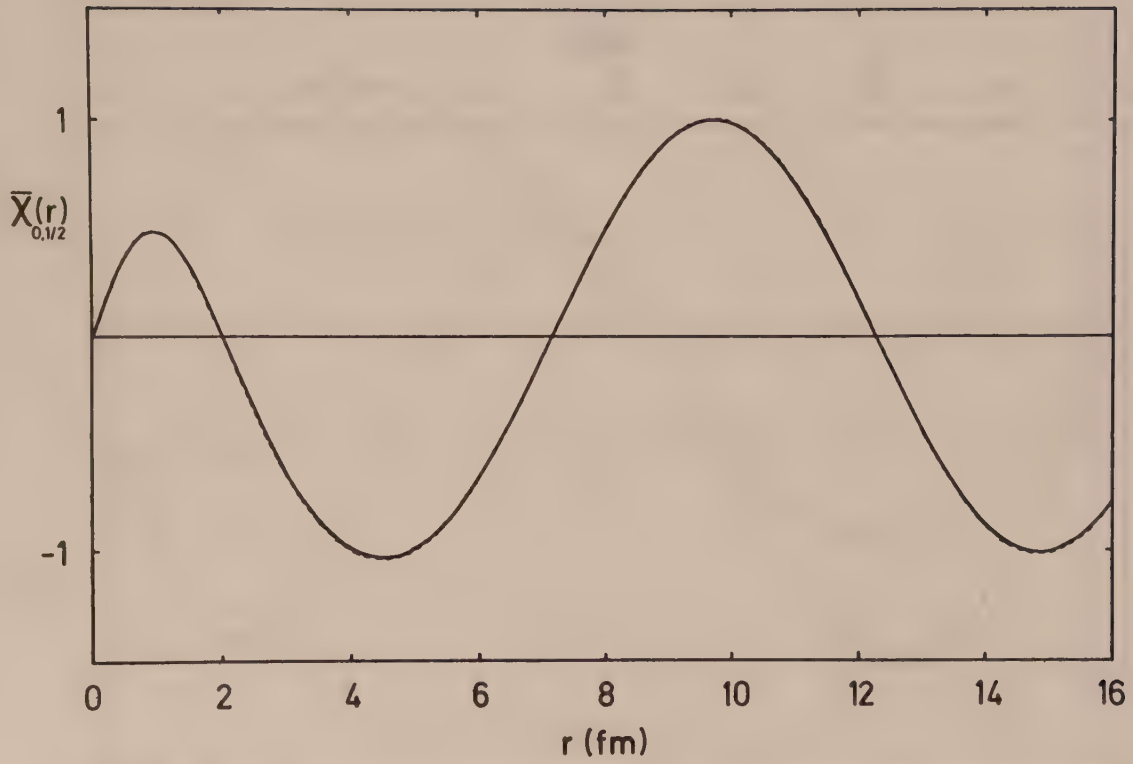

Fig. 15

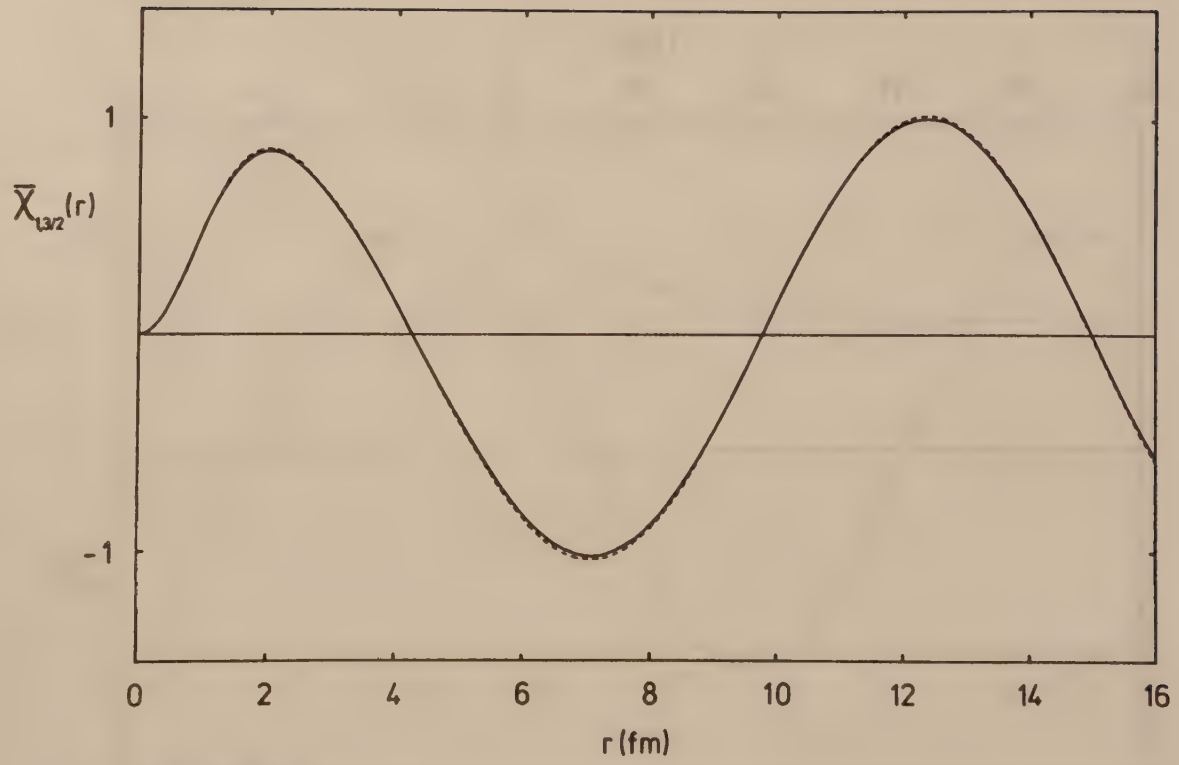

Fig. 16

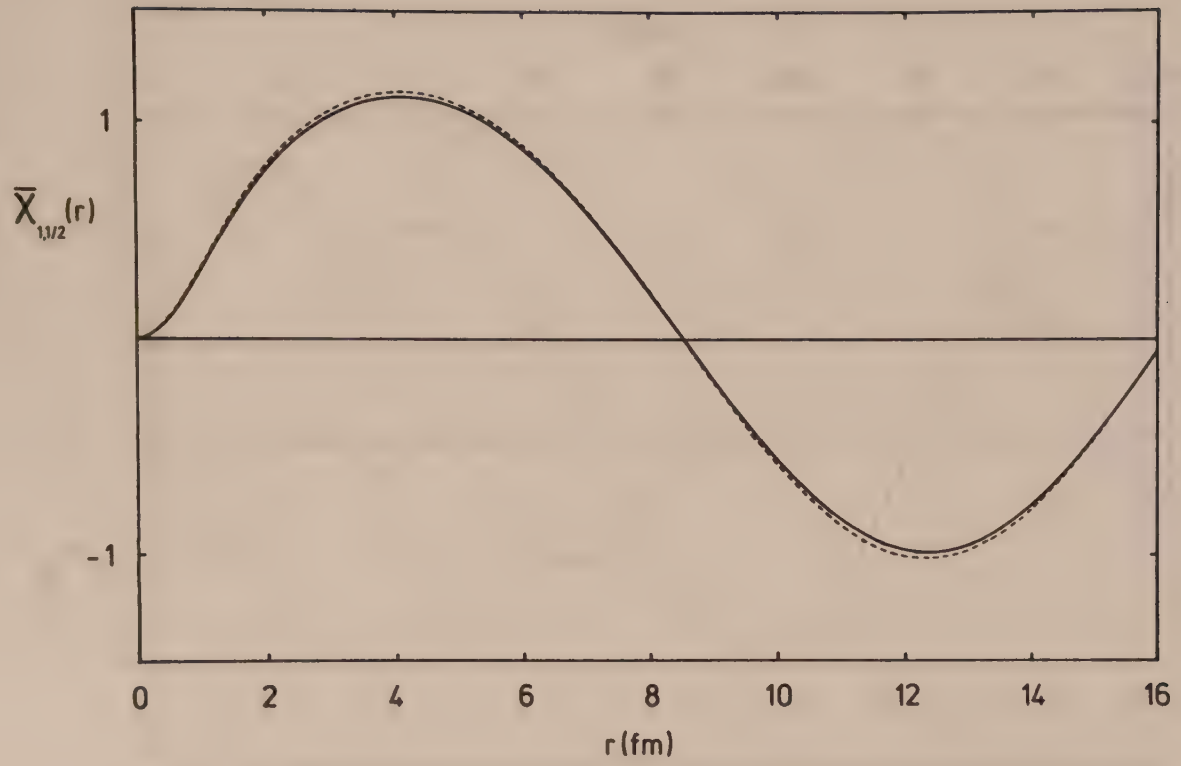

Fig. 17

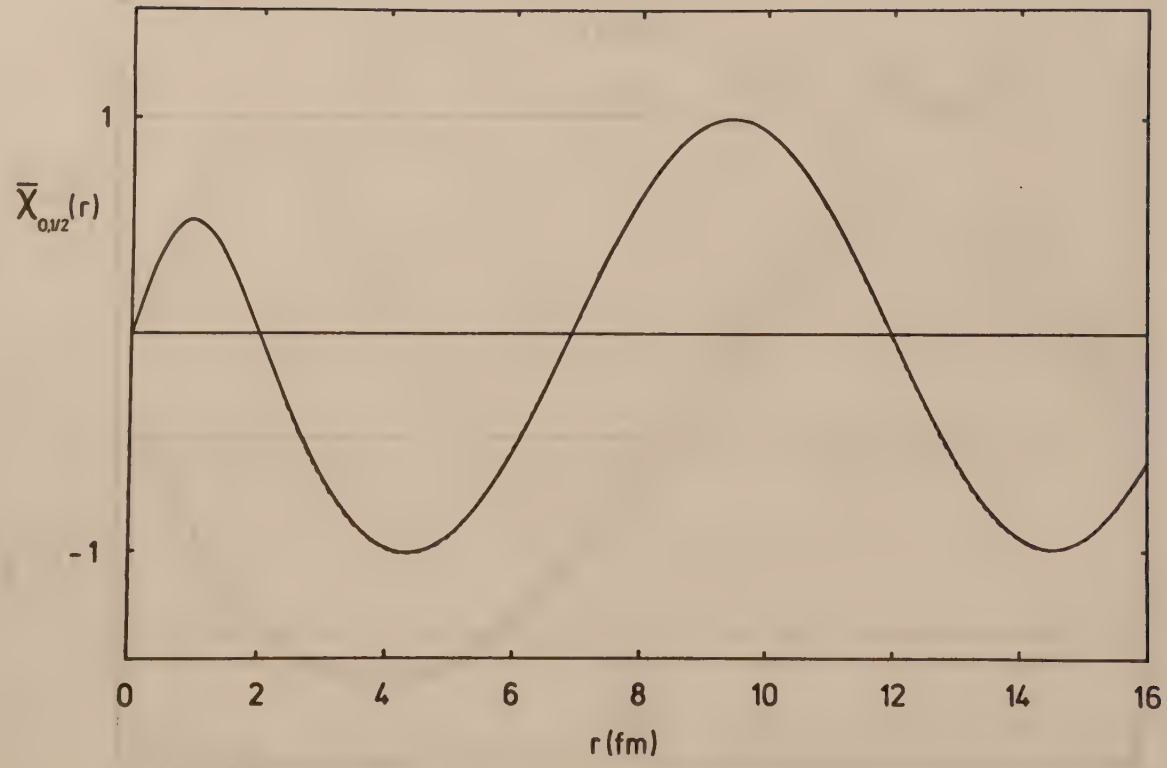

Fig. 18

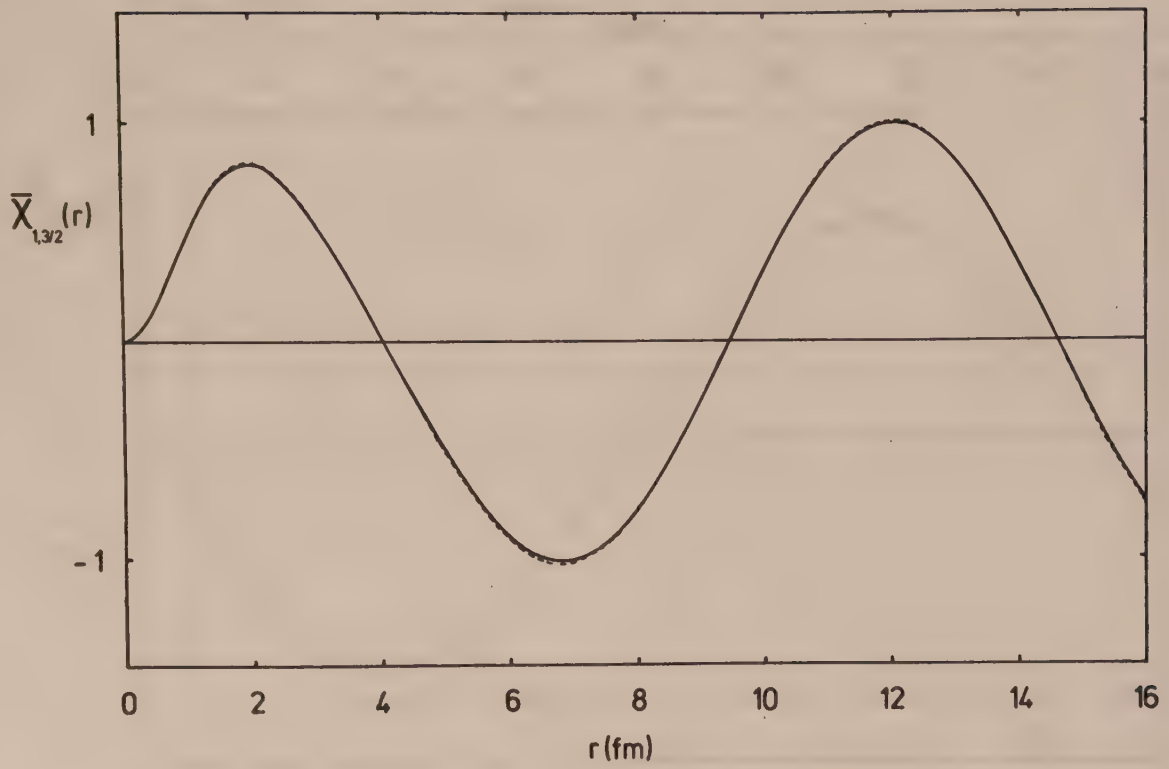

Fig. 19

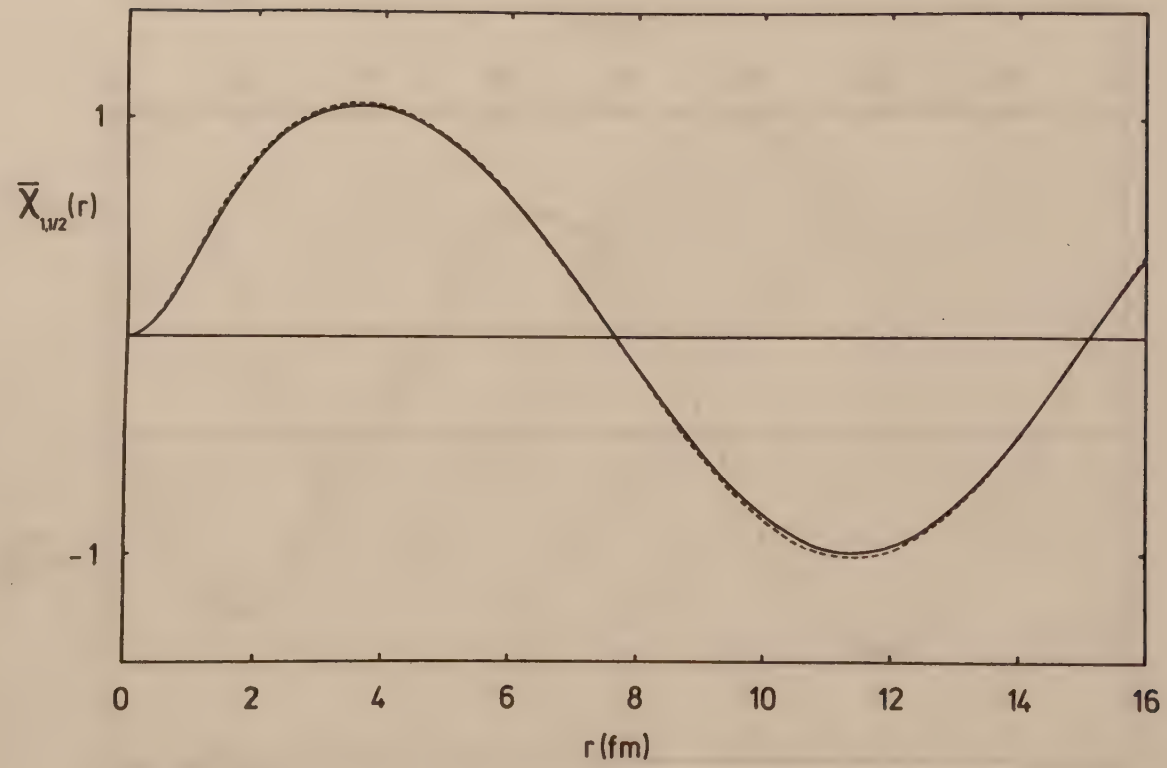

Fig. 20

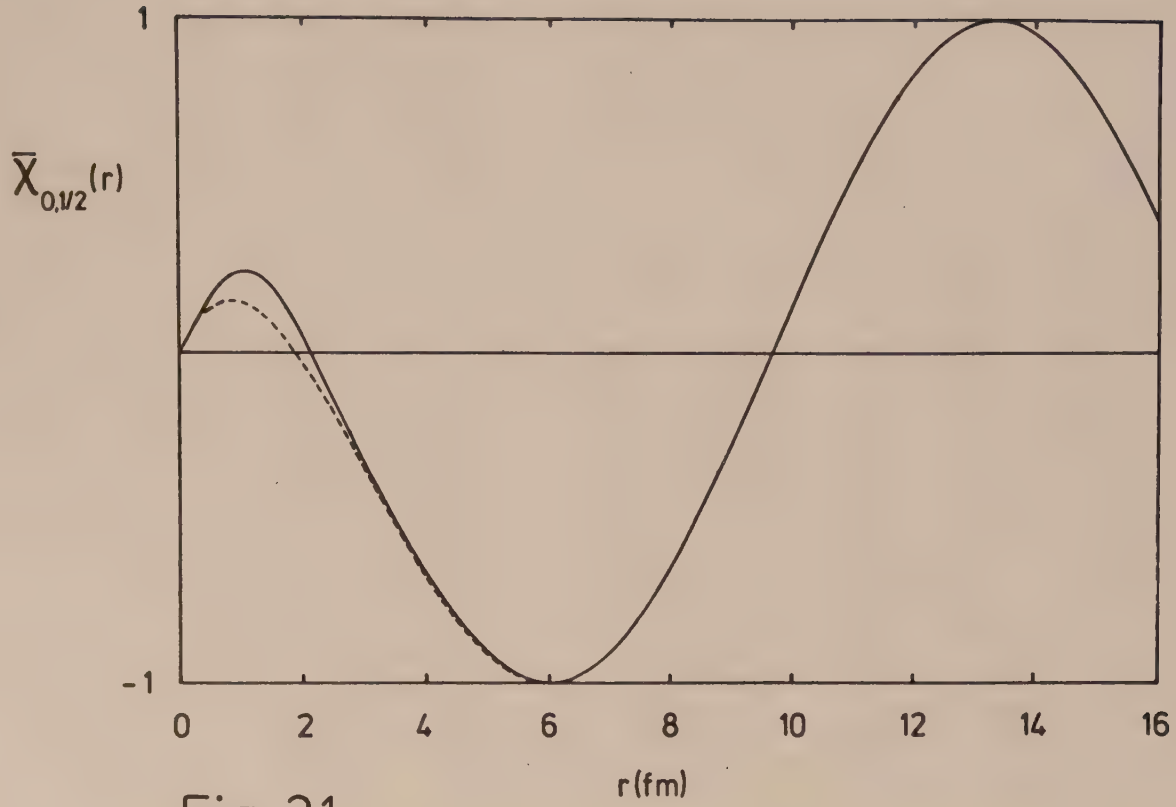

Fig. 21

Für die Anregung zu und sein stetiges Interesse an dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Dr. E.W. Schmid meinen großen Dank aussprechen, der während der ganzen Zeit als vorbildlicher Doktorvater mit zahlreichen klärenden Gesprächen unermüdlich physikalischen Beistand leistete, und mir somit aus mancher Sackgasse der theoretischen Kernphysik und der Numerik herausgeholfen hat.

Mein herzlicher Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. S. Oryu und Dr. M. L'Huillier für zahlreiche Diskussionen.

Mein besonderer Dank gilt Dr. M.C.L. Orlowski für die kritischen Diskussionen und die Verbesserungsvorschläge für das Manuskript.

Dank schulde ich auch meinem früheren Kollegen Dr. H. Seichter, und meinen jetzigen Kollegen Herrn K. Hahn, Dr. H. Leeb, Dr. M.C.L. Orlowski und G. Spitz für viele aufschlußreiche Gespräche und die gute Zusammenarbeit. Nicht zuletzt danke ich Frau Ch. Stiller für die Hilfe bei der Herstellung des Manuskripts.

Die numerischen Rechnungen wurden auf der Rechenanlage TR 440 und teilweise auf der Rechenanlage Univac 1100/80 des Zentrums für Datenverarbeitung der Universität Tübingen durchgeführt. Einige der verwendeten Unterprogramme entstammen der IMSL-Bibliothek. Den Mitarbeitern des Zentrums für Datenverarbeitung sei an dieser Stelle für ihre Unterstützung herzlich gedankt.

Lebenslauf

Am 16. Juli 1951 wurde ich als Sohn des Richard Kircher und Helma Kircher geb. Kreß in Esslingen am Neckar geboren. Von 1958 bis 1962 besuchte ich die Grundschule in Esslingen. Im Jahre 1962 legte ich am Georgii-Gymnasium in Esslingen die Aufnahmeprüfung zum Besuch dieses Gymnasiums mit Erfolg ab, wo ich nach 9 Schuljahren im Frühjahr 1970 das Abitur machte.

Im Herbst 1970 begann ich mit dem Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen, wo ich im Jahre 1973 die Vordiplomprüfung in Physik ablegte. Die Diplomprüfung legte ich im Jahre 1976 ab. Die Diplomarbeit fertigte ich in der experimentellen Festkörperphysik mit dem Thema "Konstruktion einer Magnetfeldmikrosonde zur Untersuchung der Stromverteilung in Supraleitern 2. Art" unter der Leitung von Prof. Dr. Hübener bis Anfang 1978 an.

Das Thema der vorliegenden Arbeit erhielt ich im März 1978 von Herrn Prof. Dr. E.W. Schmid, unter dessen Anleitung ich die Arbeit bis Dezember 1980 fertigstellte. In diesem Zeitraum war ich nacheinander Wissenschaftlicher Angestellter, Wissenschaftliche Hilfskraft und Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen.

Mathematik- und Physikvorlesungen habe ich bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten gehört:

M. Baumann, W. Beekmann, G. Dähn, F. Gönnenwein,
R.P. Hübener, P. Kramer, G. Mack, G. Möllenstedt,
R. Mühleisen, H.H. Schaefer, E.W. Schmid, H. Seiler,
R. Speidel, G. Staudt, H. Stumpf, A. Wolf.

Offsetdruck Spengler
Lessingstraße 4 · 7401 Neustetten 1
Telefon (07472) 22145